ELASTISCHER ZUSTAND UND SPANNUNGSVERTEILUNG IM ERDINNERN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN NATURWISSENSCHAFTLICH-MATHEMATISCHEN FAKULTÄT

DER

ALBERT-LUDWIG-UNIVERSITÄT

ZU

FREIBURG i. BR.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

VORGELEGT VON

KARL FEURSTEIN

AUS

FREIBURG i. B.

Druck- und Verlags-Gesellschaft vorm. Dölter, Emmendingen
1912.

Gedruckt mit Genehmigung der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Freiburg i. Br.

Dekan:
Geh. Rat Prof. Dr. Fr. Himstedt.

Referenten:
Geh. Rat Prof. Dr. Fr. Himstedt.
Prof. Dr. J. Koenigsberger.

Inhaltsverzeichnis.

Seite.

§ 1. Theoretische Grundlagen 5

§ 2. Die Bestimmung der Riegheit der Erde aus ihrer Elliptizität, aus den Gezeiten und Polschwankungen 8

§ 3. Eine Abhandlung von Jeans 12

§ 4. Ueber Erdbebenwellen 15

§ 5. Ueber die physikalische Beschaffenheit des Erdinnern . . 22

§ 6. Die Spannungsverteilung im Erdinnern 36

§ 7. Zusammenfassung, Resultate und Folgerungen 57

Anhang: Darwins Arbeit über die durch das Gewicht der Kontinente und der Gebirge im Erdinnern hervorgerufenen Spannungen 64

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543126_0007

Die vorliegende Arbeit gibt zunächst eine Uebersicht über die wichtigsten Methoden zur Bestimmung der elastischen Eigenschaften der Erde und beschäftigt sich dann des weiteren mit der Ermittelung der Dichteverteilung und der durch die Gravitation verursachten Spannungen im Erdinnern auf Grundlage der Massenverteilungshypothese Wiecherts und der von ihm und seinen Mitarbeitern bezüglich der Fortpflanzung der Erdbebenwellen erhaltenen Resultate. Die Ergebnisse der Berechnung liefern einen Beitrag zur Mechanik der Gebirgsbildung. Als Anhang ist die bedeutungsvolle, aber wenig zugängliche Untersuchung Darwins über das durch die Gebirge und Senken im Innern der Erde hervorgerufene Spannungssystem in ihren Grundzügen wiedergegeben.

§ 1. Theoretische Grundlagen.

Die Gleichungen des Gleichgewichts für einen isotropen elastischen festen Körper sind:

$$(1) \quad (\lambda + \mu) \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right) \Delta + \mu \nabla^2 (u, v, w) + \rho (X, Y, Z) = 0$$

worin $\Delta = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}$ die kubische Dilatation, u, v, w die Verschiebungen in den Axenrichtungen, ρ die Dichte eines Volumenelements, X, Y, Z die Komponenten der Massenkräfte und λ und μ Konstanten bedeuten, die mit dem Younghschen Modul E, der Poissonschen Konstanten σ und dem Kompressionsmodul k durch die Beziehungen

$$\lambda = \frac{E \cdot \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}; \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}; k = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}; \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

verknüpft sind.

Für manche Zwecke erweist sich die Einführung krummliniger Koordinaten als vorteilhaft. Mit Hilfe der Relation

$$(\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z) = \frac{1}{2} \operatorname{curl} (u, v, w) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z}, \frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x}, \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}\right)$$

und unter Berücksichtigung der Identität

$$\nabla^2 (u, v, w) = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right) \Delta - 2 \operatorname{curl} (\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z)$$

geht 1. in

$$(\lambda + 2\,\mu) \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right) \Delta - 2\,\mu \operatorname{curl} (\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z) + \rho\,(X, Y, Z) = 0$$

oder in

$$(\lambda + 2\,\mu)\,(\text{Gradient v} \,.\, \Delta) - 2\,\mu\,(\text{curl v} \,.\, \bar{\omega}) + \rho\,(\text{Massenkrft.}) = 0$$

über. — An letztere Schreibweise knüpft die Transformation unmittelbar an. Der Gradient von Δ ist der Vektor, dessen Komponente in irgend welcher Richtung gleich der Aenderung von Δ pro Längeneinheit dieser Richtung ist. Wirkt die Massenkraft nur radial und findet demnach nur radiale Verzerrung statt, so schreibt sich die letzte Gleichung gemäss der Bedeutung des Gradienten:

$$(\lambda + 2\,\mu) \frac{\delta}{\delta r} (\Delta) + 2\,\mu\,(\text{curl v} \,.\, \bar{\omega})_r + \rho \,.\, R = 0.$$

Die passend gewählten, voneinander unabhängigen Flächenscharen

$$f_1 (x, y, z) = \alpha;\ f_2 (x, y, z) = \beta;\ f_3 (x, y, z) = \gamma$$

bestimmen in den Parametern α, β, γ die „krummlinigen" Koordinaten ihres Schnittpunktes. Bedenkt man, dass die Dilatation die Divergenz der Verschiebung (u, v, w) ist und dass

$$2\,(\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z) = \operatorname{curl} (u, v, w),$$

so erhält man Dilatation und Drehungen in diesen krummlinigen Koordinaten in der Form: [1])

$$\Delta = h_1 \,.\, h_2 \,.\, h_3 \,.\, \left[\frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2 \,.\, h_3}\right) + \frac{\delta}{\delta\beta}\left(\frac{u_\beta}{h_1 \,.\, h_3}\right) + \frac{\delta}{\delta\gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_1 \,.\, h_2}\right)\right]$$

$$2\,\bar{\omega}_\alpha = h_3 \,.\, h_2 \left[\frac{\delta}{\delta\beta}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right) - \frac{\delta}{\delta\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{h_2}\right)\right];\ h_1^2 = \left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)^2$$

$$2\,\bar{\omega}_\beta = h_1 \,.\, h_3 \left[\frac{\delta}{\delta\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_3}\right)\right];\ h_2^2 = \left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\beta}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)^2$$

$$2\,\bar{\omega}_\gamma = h_2 \,.\, h_1 \left[\frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right) - \frac{\delta}{\delta\beta}\left(\frac{u_\gamma}{h_1}\right)\right];\ h_3^2 = \ldots\ldots\ldots$$

Für Polarkoordinaten r, ϑ, φ ist $\alpha = r$, $\beta = \vartheta$, $\gamma = \varphi$; die Verschiebungen sind u_r, u_ϑ, u_φ und mit den bekannten Transfor-

[1]) Love, Lehrb. d. Elast., pg. 65 u. 105 ff.; Lamé, J. de Math. t. 19 (1854) und Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859.

mationsformeln resultieren Dilatation und Drehungen als

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta}\left[\frac{\delta}{\delta r}(r^2 \cdot u_r \cdot \sin\vartheta) + \frac{\delta}{\delta\vartheta}(r \cdot u_\vartheta \cdot \sin\vartheta) + \frac{\delta}{\delta\varphi}(r \cdot u_\varphi)\right]$$

$$2\,\tilde{\omega}_r = \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta}\left[\frac{\delta}{\delta\vartheta}(r \cdot u_\varphi \cdot \sin\vartheta) - \frac{\delta}{\delta\varphi}(r \cdot u_\vartheta)\right]$$

$$2\,\tilde{\omega}_\vartheta = \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta}\left[\frac{\delta u_r}{\delta\varphi} - \frac{\delta}{\delta r}(r \cdot u_\varphi \cdot \sin\vartheta)\right]; \quad 2\,\tilde{\omega}_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\delta}{\delta r}(r \cdot u_\vartheta) - \frac{\delta u_r}{\delta\vartheta}\right].$$

Findet Verschiebung nur in der Richtung des Radius statt, ist also $u_\vartheta = 0$, $u_\varphi = 0$ und wird $u_r = U$ gesetzt, so verschwinden die Drehungen. Die Dilatation reduziert sich auf

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta}\frac{\delta}{\delta r}(r^2 \cdot U \cdot \sin\vartheta) = \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta}\left[r^2 \cdot U \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{\delta\vartheta}{\delta r} + r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot \frac{\delta U}{\delta r} + 2\,r\,U \sin\vartheta\right]$$

oder, da ϑ unabhängige Variable, auf

1a. $$\Delta = \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot}\left[r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot \frac{\delta U}{\delta r} + 2\,r \cdot U \cdot \sin\vartheta\right] = \frac{\delta U}{dr} + 2\frac{U}{r}.$$

Die Gleichung

$$(\lambda + 2\,\mu)\,(\text{Grad. v} \cdot \Delta) - 2\,\mu\,(\text{curl v} \cdot \tilde{\omega})\,r + \rho\,(\text{Massenkr.}) = 0$$

geht schliesslich bei nur radialer Verschiebung (U) und radialer Massenkraft (R) in

(2) $$(\lambda + 2\,\mu)\frac{\delta}{\delta r}\left[\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r} \cdot U\right] + \rho \cdot R = 0$$

über.

Wir schreiben Gleichung (2) zunächst so:

$$\frac{\delta}{\delta r}\left[\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r} \cdot U\right] = -\frac{\rho \cdot R}{\lambda + 2\,\mu} = R_1.$$

Eine erste Integration liefert

$$\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r}U = \int R_1\,dr + a \quad (a = \text{konst.}).$$

Setzt man $U = v \cdot w$, wo v und w zwei willkürliche Funktionen von r bedeuten, so erhält man

$$v \cdot \left[\frac{\delta w}{\delta r} + \frac{2}{r}w\right] + \left[w\frac{\delta v}{\delta r} - \left(\int R_1\,dr + a\right)\right] = 0.$$

Bei der völligen Freiheit in der Wahl von v und w sind zum Bestehen der Gleichung die beiden Klammerausdrücke linker Hand einzeln Null zu setzen. Aus

$$\frac{dw}{dr} + \frac{2}{r} \cdot w = 0$$

folgt

$$w = \frac{k}{r^2};$$

damit wird aus der zweiten Klammer

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r^2}{k}\left(\int R_1\, dr + a\right)$$

und

$$v = \frac{1}{k}\int r^2 \left(\int R_1\, dr + a\right) dr + \text{konst.}$$

Als Integral der Differenzialgleichung (2) ergibt sich hiermit

$$U = \frac{1}{r^2}\left[K + \int r^2\left(\int R_1\, dr + a\right) dr\right]. \tag{3}$$

K und a sind die Integrationskonstanten.

Die Spannungskomponenten sind radial:

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\delta U}{\delta r} + 2\lambda\,\frac{U}{r},$$

transversal:

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = \widehat{\varphi\varphi} = \lambda\,\frac{\delta U}{\delta r} + 2\,(\lambda + \mu)\,\frac{U}{r}.$$[1])

Zu ihrer Anwendung auf geophysikalische Probleme verlangen die elastischen Gleichungen die Kenntnis der elastischen Eigenschaften, d. h. irgend zweier der Konstanten k, E, λ, μ, σ und der Dichteverteilung im Erdinnern. — Ich gebe im folgenden eine kurze Uebersicht über die wichtigsten und interessantesten Methoden zur Erforschung der elastischen Eigenschaften der Erde und ihre Resultate.

§ 2. Die Bestimmung der Riegheit der Erde aus ihrer Elliptizität, aus den Gezeiten und Polschwankungen.

Die im Innern der Erde durch die gegenseitige Gravitation der Teile verursachte Spannung ist jedenfalls sehr gross und es

[1]) Bezügl. der Transformation der Spannungskomponenten vergl. Lamé, Leçons sur la théorie . . . de l'élasticité, Paris (1852).

erscheint zunächst fraglich, ob das Prinzip der Superposition für etwaige äussere störende Kräfte mit einiger Berechtigung angewandt werden kann. Man ging dieser bei vielen geophysikalischen Problemen auftretenden Schwierigkeit dadurch aus dem Weg, dass man die Erde als inkompressibel betrachtete. — Unter dieser Annahme lässt sich die Steifigkeit der Erde nach verschiedenen Methoden der Grössenordnung nach auswerten.

1.[1]) Es ergibt sich, dass die durch die tägl. Rotation verursachte Abweichung der Erdfigur von der Kugel für eine feste inkompressible Kugel von der Steifigkeit μ in einem bestimmten Verhältnis kleiner ist als für eine Kugel, die von einer inkompressibeln Flüssigkeit gebildet wird. Besitzt die Kugel dieselbe Masse und Grösse wie die Erde, so ist das Verhältnis etwa $^1/_3$, wenn μ gleich der Steifheit des Stahles ist und $^3/_5$ für die Riegheit des Glases. — Die Elliptizität der Erde ist $^1/_{297}$; die Elliptizität eines kugelähnlichen Sphäroids aus homogener in kompressibler Flüssigkeit von der Grösse und Masse der Erde und mit derselben Rotationsgeschwindigkeit wäre $^1/_{230}$. Ersetzt man die Flüssigkeit durch inkompressibles festes Material von der Steifheit des Glases, so ergibt sich die Elliptizität $^1/_{383}$, also ein zu kleiner Wert. Berücksichtigt man aber, dass die verminderte Dichte der Oberflächenschichten die Elliptizität der Erdfigur erhöht,[2]) so scheint die Annahme nicht allzu unbegründet, dass die Riegheit der Erde in erster Annäherung mit der des Glases verglichen werden kann.

2. „Die Abweichung, die ein Glied des Gezeitenpotentials an der Oberfläche einer homogenen inkompressibeln flüssigen Kugel von der Grösse und Masse der Erde oder an der Oberfläche eines Ozeans, der einen vollkommen starren kugelförmigen Kern bedeckt, hervorrufen würde, heisst die „wahre Gleichgewichtshöhe" der entsprechenden Gezeit."[3]) Ist nun der feste Kern nicht absolut starr, so wird er selbst durch die gezeitenbildenden Kräfte gehoben werden; die Gezeitenhöhe vermindert sich dadurch — vergl. die bezüglich der Elliptizität der Erdfigur oben erhaltenen Resultate — auf $^2/_3$ bezw. $^2/_5$ der wahren Gleichgewichtshöhe, wenn die Steifigkeit der Erde die des Stahles bezw. die des Glases ist. Folgten die Gezeiten den Gleichgewichtsgesetzen, so könnte man also aus ihrer beobachteten Höhe auf eine bestimmte Steifigkeit der Erde schliessen. Nun erreichten bei verschwindender Reibung zwischen Ozean und

[1]) Vergl. zu 1. und 2. Love, Lehrb. d. Elast. pg. 307 ff.

[2]) Chree, phil. Mag. (Ser. 5) vol. 32, pg. 249.

[3]) Love, Lehrb. d. Elast. pg. 309.

Kern die Gezeiten noch nicht die halbe Geschwindigkeitshöhe.[1]) Die vorhandene Reibung des Meeres am Boden gleicht aber die Gezeitenhöhe der wahren Höhe an und das umsomehr je länger die Periode der Gezeit. — W. Schweydar (Gerlands Beitr. z. Geophysik, Bd. IX, Heft 1, 1907) fand aus einem umfangreichen Beobachtungsmaterial für den Verkleinerungsfaktor (= Verhältnis der beobachteten zur wahren Gleichgewichtshöhe) der halbmonatlichen Gezeit 0,661 und den der monatlichen Flut 0,642. Bei Annahme des Wiechertschen Dichtegesetzes erhält man hieraus als Elastizitätskoeffizienten (μ) $6{,}1.10^{11}$ c. g. s. bezw. $5{,}5.10^{11}$ c. g. s.

3.[2]) Die geringen Aenderungen der Breite eines Ortes haben darin ihre Ursache, dass die Drehaxe der Erde ihre Lage im Laufe der Zeit ändert. — Das Phänomen der Polschwankungen lässt sich wie bei der Erde bei jedem Kreisel beobachten und rechnerisch verfolgen. — Wäre die Erde vollkommen starr und wirkten keine störenden Kräfte, so müssten die Drehpole Kreise um die Mittellage beschreiben und diese in 305 Tagen durchlaufen. Nun ist die Polbahn kein Kreis, sondern eine komplizierte unregelmässige Schleife. Eine gewisse Periode lässt sich immerhin erkennen und zwar beträgt ihre Dauer rund 427 Tage (nach neueren Arbeiten von van de Sande Bakhuyzen und von Kimura 431,2 bezw. 436,6 Tage). Da letzterer Wert den theoretisch errechneten erheblich übertrifft, so müssen fortwährend Störungen die Drehungsaxe verlegen. (Die Störungen entstehen hauptsächlich wohl durch Verlagerung der Massen der Atmosphäre, welche mit meteorologischen Vorgängen verknüpft ist. — Nach J. Milne u. And. bilden die Erdbeben die wesentliche Ursache). — Die Verlängerung der Periode entspricht, wie S. Newcomb zeigte (Monthly Notices vol. 52, 1892) einer gewissen Nachgiebigkeit der Erde. Aus dem Unterschied der einer vollkommen starren Erde entsprechenden Eulerschen Periode von 305 Tagen und der tatsächlich beobachteten Chandlerschen Periode lässt sich ein Schluss auf die Steifigkeit des Erdmaterials ziehen.

[3]) Aus den Polschwankungen fand S. Hough[4]), ohne den Einfluss der Ozeane zu berücksichtigen, für die homogene inkompressible Erde die Steifigkeit $7{,}65.10^{11}$ c. g. s.

---

[1]) Vergl. Darwin, Proc. Roy. Soc., vol. 41 (1886) u. Lamb, Hydrodynamics, Kap. VIII.

[2]) Vergl. zu 3. Wiechert und Zoeppritz, üb. Erdbebenwellen I, (Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1907).

[3]) Vergl. zum folgenden A. Brill, über die Elastizität d. Erde, Dissert. Göttingen 1908.

[4]) Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1896, Bd. 187.

M. P. Rudzki[1]) berechnete aus den Polschwankungen für eine elastische homogene inkompressible und vollkommen von einem Ozean bedeckte Erde für die Riegheit zwischen $8{,}79.10^{11}$ c. g. s. und $26{,}81.10^{11}$ c. g. s. liegende Werte, wenn die „effektive Dichte" — d. i. die Dichte, die die richtigen Oberflächendeformationen ergibt — zwischen 3,0 und 5,5 variiert.

Für die inhomogene Erde führte Herglotz[2]) unter Annahme des Dichtegesetzes von Roche und Wiechert die Berechnung durch. Für den mittleren Elastizitätskoeffizienten (μ) ergab sich ohne Berücksichtigung der Meeresflut und bei Annahme der Wiechertschen Massenverteilungshypothese $11{,}68.10^{11}$ c. g. s.

In einer neueren Arbeit ermittelt A. Brill[3]) den Einfluss der Flutwellen von der Periode der Polhöheschwankungen — van de Sande Bakhuyzen[4]) und Christie[5]) glauben eine vierzehnmonatliche Flut nachweisen zu können — auf die Eulersche Periode bei Zugrundlegung der Wiechertschen Zweiteilung der Erde in Gesteinmantel und Metallkern und bestimmt dann den Elastizitätskoeffizienten (μ) des Kerns aus der Chandlerschen Periode, wenn für den Elastizitätskoeffizienten des Mantels der Wert genommen wird, der sich aus den Wiechertschen Resultaten über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen ergibt (vergl. unten Seite 34). Brill legt die 436,6 tägige Periode Kimuras zu Grund. — Wiechert erhält für die mittlere Geschwindigkeit der Transversalwellen im Mantel 5,32 km und daraus den Elastizitätskoeffizienten $7{,}13.10^{11}$ c. g. s. für den Mantel. Um nun die Chandlersche Periode zu erhalten, muss man nach Brill die Riegheit des Kerns zu $14{,}48.10^{11}$ c. g. s. und die mittlere Transversalwellen-Geschwindigkeit im Kern zu 4,66 km annehmen. — Eine beträchtliche Variation des Elastizitätskoeffizienten des Mantels ändert den Wert für die Steifigkeit des Kerns sehr wenig. — Wiechert fand in über 1500 km Tiefe die Geschwindigkeit der Schiebungswellen zu 6,75 km. Brill folgert aus seinem bedeutend kleineren Wert, dass die Wellengeschwindigkeit in grösseren Tiefen wieder erheblich abnehmen müsse. — Die Berechtigung dieser Schlussfolgerung scheint mir allerdings nicht durchaus festzustehen. Brill betrachtet von vornherein die sicher kompressible Erde als inkompressibel, und im übrigen dürfen die

[1]) Anzeiger d. Akad. d. W. z. Krakau 1899.
[2]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1905, Bd. 52.
[3]) Ueb. d. Elast. d. Erde, Dissert. Göttingen 1908.
[4]) Astr. Nachr. Bd. 136, No. 3261.
[5]) Bulletin of the Phil. Soc. of Washington, 1895, Vol. XII.

aus Erdbebenbeobachtungen berechneten elastischen Konstanten nicht ohne weiteres verglichen werden mit den aus den langperiodigen Polschwankungen gefundenen. Die Steifigkeit nimmt ab mit der Dauer der Kraftwirkung. Die aus den Polschwankungen berechneten Geschwindigkeiten der transversalen Erdbebenwellen müssen also geringer ausfallen als die aus Beobachtung und Theorie der Momentanstörungen erhaltenen (vergl. unten Seite 34 und 35). —

W. Schweydar[1]) und O. Hecker[2]) bestimmten neuerdings den Elastizitätskoeffizienten aus dem Verhältnis der beobachteten Ablenkung eines Lotes infolge der Anziehung des Mondes zur Ablenkung für eine vollkommen starre Erde. Der Verkleinerungsfaktor — Verhältnis der beobachteten zu der für eine starre Erde theoretisch geforderten Ablenkung — ergab sich zu 0,667 (Schweydar) bezw. 0,675 (Hecker).

Bemerkenswert ist, dass aus dem Wiechertschen Elastizitätskoeffizienten des Mantels und der der Chandlerschen Periode entsprechenden Steifigkeit des Kerns für den Verkleinerungsfaktor der viel grössere Wert 0,833 folgt.

Nach Beobachtungen an Horizontalpendeln deformiert sich der feste Erdkörper infolge der Anziehung von Sonne und Mond annähernd wie ein gleich grosses Sphäroid mit der Elastizität des Stahles. (O. Hecker, Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluss von Sonne und Mond; Berlin 1907.)

§ 3. Eine Abhandlung von Jeans.

In einer interessanten Abhandlung[3]) hat Jeans den Mittelwert der Konstanten λ für die Erde zu berechnen versucht. — Wenn man von der Gravitation absieht, so ist ein elastischer fester Körper zweifellos stabil; bei jeder Verschiebung wächst die potentielle Energie. Wirkt aber die Schwerkraft, so nimmt bei einer Verschiebung aus der Gleichgewichtslage die potentielle Energie entweder zu oder ab — und dass sie abnehmen kann, lässt sich beweisen.[4]) Sobald aber die Abnahme des Potentials der Schwerkraft den Zuwachs am Potential der elastischen Kräfte übertrifft, wird die Gleichgewichtsfigur instabil oder nach einem Ausdruck Poincaré's: in

[1]) Gerlands Beitr. z. Geophysik, Bd. IX, Heft 1, 1907.

[2]) Veröffentlichung d. Kgl. Pr. Geodät. Instituts, Neue Folge No. 32, 1907.

[3]) Phil. Trans. R. Soc. (Ser. A), 1903, vol. 201, pg. 157.

[4]) Jeans, Phil. Trans. (Ser. A), vol. 199, pg. 1.

einer „linearen Reihe“ sphärischer Konfigurationen treten „points of bifurcation“ : Zweiteilungspunkte aut.[1])

Sei a der Radius, M die Masse, ρ_0 die mittlere Dichte und λ_0 der Mittelwert der Elastizitätskonstanten λ für einen als kugelförmig gedachten Planeten. λ, μ und ρ sind bei der völligen radialen Symmetrie der Kugel Funktionen von r/a. Drückt man λ/λ_0, μ/μ_0, ρ/ρ_0 als Funktionen dieser Veränderlichen aus, so sind die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von r/a, die mit c_1, c_2, c_3 u. s. w. bezeichnet seien, reine Zahlen und unabhängig von dem für λ, ρ, a gewählten Masssystem. — Durch Aenderung eines der Parameter ρ_0, λ_0, a werde eine lineare Reihe von Konfigurationen erhalten ; Bifurkationspunkte treten dann in ihr auf, wenn der veränderliche Parameter einer gewissen Funktion der übrigen Parameter, der c und von γ (der Gravitationskonstanten) gleich wird. Für einen Bifurkationspunkt gilt also die Gleichung:

$$f(\gamma, \lambda_0, \rho_0, a, c_1, c_2, c_3, \ldots) = 0. \tag{1}$$

Nach der Verbindung $[\gamma, \lambda_0, \rho_0, a]$ aufgelöst lautet dieselbe

$$[\gamma, \lambda_0, \rho_0, a] = \psi(c_1, c_2, c_3, \ldots).$$

Die Funktion ψ rechter Hand bedeutet eine Operation mit den reinen Zahlen c_1, c_2, c_3, . . . ; $\psi(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ ist also und mit ihr die linke Seite der Gleichung ebenfalls eine reine Zahl. — Die Grössen γ, λ_0, ρ_0, a lassen sich nur in der Verbindung $\frac{\gamma . \rho_0^2 . a^2}{\lambda_0}$ als reine Zahl darstellen; demzufolge gestaltet sich die Gleichung (1) so:

$$f\left(\frac{\gamma . \rho_0^2 . a^2}{\lambda_0}, c_1, c_2, c_3, \ldots\right) = 0. \tag{2}$$

Für

$$\frac{\gamma . \rho_0^2 . a^2}{\lambda_0} = 0 \quad (\gamma = 0, \text{ keine Gravitation})$$

herrscht, wie wir oben sahen, stabiles Gleichgewicht; für

$$\frac{\gamma . \rho_0^2 . a^2}{\lambda_0} = \infty$$

kann nur labiles Gleichgewicht bestehen. Also wird für einen zwischen Null und Unendlich liegenden Wert von $\frac{\gamma . \rho_0^2 . a^2}{\lambda_0}$ ein Uebergang von einer Gleichgewichtsart zur andern, d. h. ein Bifurkationspunkt

[1]) Acta Math., vol. 7, pg. 259.

eintreten. In ihm ist $\frac{\gamma \cdot \rho_0^2 \cdot a^2}{\lambda_0}$ eine Wurzel von (2). Bezeichnet Φ die kleinste Wurzel der Gleichung (2.), so ist also im Augenblick der Zweiteilung

$$\frac{\gamma \cdot \rho_0^2 \cdot a^2}{\lambda_0} = \Phi = \psi\,(c_1, c_2, c_3, \ldots).$$

Das System ist stabil für

$$\frac{\gamma \cdot \rho_0^2 \cdot a^2}{\lambda_0} < \Phi, \text{ nicht stabil für } \frac{\gamma \cdot \rho_0^2 \cdot a^2}{\lambda_0} > \Phi.$$

λ und ρ sind auf ihre Mittelwerte bezogen; also, schliesst Jeans, werden auch die c von ihrem mittleren oder einem ihm sehr nahe liegenden Wert, d. i. der Einheit, nicht sehr verschieden sein. (Der Mittelwert aller positiven und negativen Zahlen ist Null oder bei einer endlichen Zahl der gegebenen Grössen mit fast derselben Wahrscheinlichkeit 1). Dementsprechend weicht voraussichtlich

$$\frac{\gamma \cdot \rho_0^2 \cdot a^2}{\lambda_0} = \Phi = \psi\,(c_1, c_2, \ldots)$$

seinem absoluten Betrag nach nicht allzusehr von 1 ab. — Setzt man nun den bei der Erde gegebenen Verhältnissen entsprechend

$$a = 6400.10^5 \text{ cm}, \rho = 5{,}5; \gamma = 648.10^{-10} \text{ c. g. s}$$

so wird

$$\gamma \cdot \rho_0^2 \cdot a^2 = 8.10^{11}$$

und mit $\Phi = 1$ erhält man

$$\lambda_0 = 8.10^{11} \text{ (c. g. s.)}.$$

Die Annahme, dass die Konstanten c und $\frac{\gamma \cdot \rho_0^2 \cdot a^2}{\lambda_0}$ annähernd der Einheit gleich seien, erscheint auf den ersten Blick doch recht willkürlich. Jeans zeigt aber durch eine ziemlich weitläufige mathematische Deduktion, dass für einen Planeten von überall gleicher Dichte und gleichen elastischen Konstanten — durch ein äusseres Kraftfeld, das die Schwerkraft im Gleichgewichtszustand gerade aufhebt, lässt sich dieses System darstellen — wenn man ρ_0 für ρ und λ_0 für $\lambda + 2\mu$ setzt, Φ tatsächlich dem angenommenen Wert recht nahe liegt. — Φ ergibt sich als eine gewisse Funktion von $\frac{\mu}{\lambda}$; für $\frac{\mu}{\lambda} = 0$ wird $\Phi = 1{,}6$, für $\frac{\mu}{\lambda} = 1$ findet man $\Phi = 1{,}27$. Für zwi-

schen 0 und 1 gelegene Werte von $\frac{\mu}{\lambda}$ bewegt sich Φ zwischen 1,6 und 1,27. — Mit unendlich grosser Dichtekonzentration (unendl. grosser Nebelball) wächst Φ über alle Grenzen. Bei wachsender Dichte nimmt demnach Φ jedenfalls zu. — Wir werden nicht sehr fehl gehen, wenn wir für die Planeten unseres Systems $\Phi = 2$ setzen. Jeans findet so als endgültigen Wert λ_0 für die Erde $4 \cdot 10^{11}$ c. g. s. (für Stahl ist $\lambda = 8{,}3 \cdot 10^{11}$ c. g. s.). —

Die Methode gewinnt besonderes Interesse dadurch, dass sie sich auch auf die übrigen Glieder des Sonnensystems anwenden lässt. Als Mittelwert der Konstanten λ erhält man in absoluten Einheiten für die Sonne: $2700 \cdot 10^{11}$, Venus: $3{,}2 \cdot 10^{11}$, Mars: $0{,}6 \cdot 10^{11}$, Jupiter: $25{,}0 \cdot 10^{11}$, Saturn: $5{,}0 \cdot 10^{11}$, Uranus: $3{,}2 \cdot 10^{11}$, Neptun: $2{,}6 \cdot 10^{11}$. ($\Phi = 2$; für $\Phi = 1$ sind die angegebenen Werte mit 2 zu multiplizieren).

§. 4. Ueber Erdbebenwellen.

Nach dem nach der Niederschrift dieses Paragraphen veröffentlichten ausgezeichneten Referat von F. Pockels in der „Geologischen Rundschau“ (Band I, Heft 5, 1910) über „die Ergebnisse der neueren Erdbebenforschung in Bezug auf die physikalische Beschaffenheit des Erdinnern“ erübrigt sich eigentlich eine Besprechung der Wiechertschen Arbeiten. Wenn ich trotzdem die betreffenden Abhandlungen in ihrem Grundgedanken und in ihren Ergebnissen in aller Kürze wiedergebe, so geschieht es der Vollständigkeit halber und vor allem deshalb, weil auf den von Wiechert, Zoeppritz und Geiger bezüglich der Erdbebenwellen erhaltenen Resultaten die ganze folgende Untersuchung sich aufbaut. —

Wir betrachten in einem nach allen oder nach mehreren Richtungen unbegrenzten elastischen festen Medium kleine Bewegungen, die zu einer bestimmten Zeit auf einen begrenzten Teil des Mediums beschränkt sind, während der übrige Teil des Körpers spannungslos ist. — Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\delta\Delta}{\delta x}, \frac{\delta\Delta}{\delta y}, \frac{\delta\Delta}{\delta z}\right) + \mu\,\nabla^2(u, v, w) = \rho\left(\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}\right)$$

bezw.

$$\mu\,\nabla^2(u, v, w) = \rho\left(\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}, \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}\right); (\lambda + 2\mu)\,\nabla^2(u, v, w) = \rho\,\frac{\delta^2}{\delta t^2}(u, v, w),$$

wenn die Dilatation bezw. wenn die Drehungen verschwinden. —

Beide Gleichungen sind von der Form

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta t^2} = c^2 \nabla^2 \psi.$$

Ist ψ eine Funktion von t und nur einer der Koordinaten, etwa von x, so wird

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$$

und $$\psi = f(x - c \,.\, t) + F(x + c \,.\, t)$$

stellt eine ebene Welle dar, die sich mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt. Hängt ψ ausser von t noch von r, dem von einem Punkt aus gezogenen Radiusvektor, ab, so ist

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\delta^2}{\delta r^2} (r \,.\, \psi).$$

Die Lösung

$$\psi = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{F(r + ct)}{r}$$

repräsentiert eine Kugelwelle mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c. Die Geschwindigkeit der Dilatationswellen (Drehungen $\omega_x, \ldots = 0$) im Medium ist $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$. Die Schiebungswellen ($\Delta = 0$) verbreiten sich dagegen mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Es lässt sich übrigens leicht zeigen, dass jede ebene Welle, mag sie sonst beschaffen sein wie sie will, mit einer der angegebenen Geschwindigkeiten fortgeleitet wird.

H. Lamb hat gezeigt,[1]) dass bei einer begrenzten Anfangsstörung an der Oberfläche eines festen Körpers bezw. in der Nähe derselben (Erdbeben!) in einiger Entfernung vom Erregungspunkt die Störung nach einem Zeitraum einsetzt, der der Ausbreitung einer wirbelfreien Dilatationswelle entspricht (— I. Vorläufer der Seismogramme —); ein zweites Stadium der Bewegung beginnt nach der Zeitspanne, die der Fortpflanzung einer Schiebungswelle entspricht (— II. Vorläufer —) und eine Bewegung viel grösserer Amplitude macht sich endlich geltend, wenn Wellen anderer Art, die Rayleigh-Wellen, die Beobachtungsstation passieren (— Hauptwellen —).

---

[1]) Phil. Trans. R. Soc. (Ser. A), vol. 203, 1904.

Die eben erwähnten Rayleigh-Wellen[1]), die sowohl als Folge von Reflexionen der schon besprochenen Wellenarten als auch selbständig auftreten, sind Schwingungen mit exponentiell variierender Intensität, die sich längs der Oberfläche des betrachteten Körpers (Erde) fortpflanzen. Die Geschwindigkeit dieser Oberflächenwellen ist in inkompressibelm Material ($\sigma = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$)

$$0{,}9554 \ldots \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

in Material, dessen Poissonsche Konstante $\frac{1}{4}$ ist ($\sigma = \frac{1}{4}$, $\lambda = \mu$),

$$0{,}9194 \ldots \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

also in beiden Fällen kleiner als die Geschwindigkeit der dilatationsfreien Wellen.

Die aus den Bewegungsgleichungen für Zustände kleiner Bewegungen resultierenden Dilatations- (Longitudinal-) und Schiebungs- (Transversal-) Wellen sind zunächst ganz unabhängig voneinander. Diese Unabhängigkeit besteht aber nur für Bereiche mit elastisch homogenem Material. Sie gilt jedenfalls nicht, wenn die elastischen Wellen durch eine Trennungsfläche aus einem Medium in ein elastisch verschiedenes anderes übertreten oder wenn sie an einer äusseren Fläche reflektiert werden. Dann gehen im allgemeinen von der Unstetigkeitsfläche nicht nur Wellen derselben Art gebrochen oder reflektiert weiter, sondern es treten auch Wellen der andern Art hinzu. — Wir werden nun sehen, dass die Erde wenigstens als in konzentrischen (ellipsoidischen) Schichten elastisch homogen angesehen werden kann; wir werden darum annehmen dürfen, dass sich die Erdbebenwellen in diesen Schichten und, da sprunghafte Aenderungen in den elastischen Eigenschaften sich nicht nachweisen lassen, in der ganzen Erde annähernd rein als Longitudinal- bezw. Transversal-Wellen fortpflanzen. Freilich läuft bei der immerhin vorhandenen Inhomogenität mit der bestimmt charakterisierten Welle eine Welle der andern Art mit; die Beimischung ist jedoch so gering, dass sie sich nur in einer unbedeutenden Schwächung der Intensität der vorherrschenden Schwingung bemerkbar macht und demnach als schwache Absorption der Wellen im Erdinnern aufgefasst werden kann.

Die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen hängt, wie wir sahen, von den Elastizitätskonstanten λ, μ und der Dichte ρ ab. Die Beob-

[1]) Zur Theorie der Rayleigh-Wellen vergl. Lord Rayleigh, Lond. Math. Soc. Proc. vol. 17 (1887) und Love, Lehrb. d. Elast. pag. 357.

achtungen erweisen nun, dass die Geschwindigkeit der Wellen mit der Tiefe unter der Erdoberfläche variiert. Lässt sich irgendwie die Geschwindigkeit der Erdbebenstrahlen in beliebiger Tiefe ausfindig machen und ist zudem die Massenverteilung in der Erde, also auch die Dichte am betreffenden Punkt bekannt, so sind wir in der Lage, die elastischen Eigenschaften der Erde raschen Schwingungen gegenüber (vergl. unten Seite 34 und 35) in jeder Entfernung vom Mittelpunkt genau anzugeben.

[1])Versteht man unter Laufzeit die Zeit zwischen dem Beginn der Registrierung eines Bebens auf der Station und dem Beginn der Registrierung im Epizentralpunkt, unter der Herddistanz die Entfernung der Station vom Epizentralpunkt, gemessen längs eines grössten verbindenden Kreises auf der Erdoberfläche und trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Laufzeit als Ordinate, die Herddistanz als Abscisse an, so liefert die graphische Darstellung der funktionalen Abhängigkeit der Laufzeit von der Herddistanz die Laufzeitkurve. — Aus der Laufzeitkurve lässt sich der „Richtungswinkel“ $\bar{i}$, d. h. der Winkel des Strahls mit der nach aussen gerichteten Normalen im Eintritts- oder Austrittspunkt ermitteln. — Die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen variiert offenbar mit dem Radius. Die Bahn der Strahlen in einem homogen geschichteten Medium lässt sich also einfach mit Hilfe der Theorie der Refraktion herleiten. Man muss sich nur die stetige Aenderung der elastischen Eigenschaften durch eine sprungweise Variation in sehr kleinen Stufen ersetzt denken. — Die aus dieser Theorie folgenden Gleichungen und Sätze ermöglichen nun eine brauchbare von Wiechert angegebene Konstruktion der Strahlen im Erdinnern und die Bestimmung der Wellengeschwindigkeit in verschiedenen Tiefen. Das erhaltene Resultat wird umsomehr der Wirklichkeit entsprechen, je niederer die Stufen sind, in denen von einer Variation der elastischen Eigenschaften abgesehen wird. Es zeigt sich jedoch, dass man den Beobachtungen schon durch Annahme ganz weniger Schichten genügen kann. Von den Unregelmässigkeiten an der Erdoberfläche, die sicher zu erwarten sind, soll abgesehen werden; desgleichen von einem etwaigen Einfluss der Herdtiefe.[2]) — Jeder Entfernung vom Herd entspricht ein gewisser Strahl durch das Erd-

[1]) Vergl. zum folgenden E. Wiechert und K. Zoeppritz, über Erdbebenwellen (Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1907).

[2]) Die Herdtiefe ist immer sehr gering; sie braucht, wenigstens soweit es sich um die Bestimmung der elastischen Eigenschaften der Erde handelt, nicht berücksichtigt zu werden.

innere. Die Laufzeitkurve gestattet, wie erwähnt, für diesen Strahl den Winkel $\bar{i}$ zu bestimmen. Je grösser die Herddistanz ist, umso tiefer dringen die Strahlen in die Erde ein und umso stärker fallen die Aenderungen des Richtungswinkels und des Krümmungsradius aus. Umgekehrt sind, von Störungen in der Erdrinde abgesehen, die wir vernachlässigen werden, für kleine Herddistanzen auch nur sehr geringe Variationen zu erwarten. Insbesondere wird der Krümmungsradius auf Strahlen, die nur wenig vom Herd sich entfernen, nur um kleine Beträge sich ändern. Wesentlich an der darzustellenden Methode ist, dass sie solche annähernd kreisförmige Strahlen (konst. Krümmungsradius) bis zu einer gewissen kleinen Herddistanz als vollkommene Kreise bezw. Kreisbogen ansieht. —

Wir betrachten beispielsweise den zur Herddistanz D = 1000 km gehörenden Strahl. $\bar{i}$ sei der aus der Laufzeitkurve abgeleitete Wert des Neigungswinkels für diese Herddistanz. Der Strahl ist durch einen die Erdoberfläche im Herd und im Punkt D = 1000 km unter dem Winkel $\bar{i}$ schneidenden Kreis gegeben. Der zum tiefsten Punkt dieses ersten Strahls gehörige Radius sei r_1; dann ist die durch r_1 und den Oberflächenradius r_0 bestimmte Kugelschale unsere erste Schicht konstanter Krümmung für alle Strahlen. Ist der Richtungswinkel $\bar{i}$ für alle Herddistanzen bestimmt, so lassen sich sämtliche in der ersten Schicht verlaufende Strahlen als Kreisbogen mit den aus den Gesetzen der Refraktion resultierenden Krümmungsradien eintragen. — Das beim Strahl D = 2000 km z. B. noch fehlende Stück wird nun, da die Lücke verhältnismässig klein ist, durch einen Kreisbogen ersetzt. Der zur Herddistanz D = 2000 km gehörige Strahl liefert in seinem tiefsten Punkt einen Radius r_2. $\overset{\frown}{r_2 r_1}$ ist die zweite Schicht konstanter Krümmung. Die in $\overset{\frown}{r_2 r_1}$ verlaufenden Strahlstücke werden konstruiert; dann wird der dritte Strahl durch einen Kreisbogen geschlossen, so eine neue Schicht konstanter Krümmung gewonnen u. s. w. Die Fortsetzung des Verfahrens führt immer tiefer in die Erde hinein. —

Unsere Konstruktion ermöglicht es, für alle Tiefen die Strahlgeschwindigkeit v zu bestimmen. Für den n_{ten} der gezeichneten Strahlen, der an der Oberfläche den Richtungswinkel $\bar{i}_n$ hat und in der Tiefe r_n umkehrt ($i_n = 90^0$) ist $v_n = \bar{v} \cdot \frac{r_n}{\bar{r} \cdot \sin \bar{i}_n}$, wenn v_n die Geschwindigkeit in der Tiefe r_n bedeutet. $\bar{v}$ und $\bar{r}$ sind die Ober-

flächenwerte der Geschwindigkeit bezw. des Radius; $\bar{i}_n$ wird der Laufzeitkurve entnommen. —

Will man grössere Genauigkeit erzielen, so wird man mit Vorteil das zeichnerische Verfahren durch die Rechnung ersetzen. Die später anzuführenden Resultate der Arbeiten von Wiechert, Zoeppritz und Geiger sind auf diesem Wege erhalten. Betreffs der näheren Ausführung der Rechnung und der anzubringenden Korrektionen sei auf die einschlägigen Abhandlungen der genannten Forscher verwiesen.[1])

Wiechert und Zoeppritz haben nun auf Grund der Seismogramme und Berichte eine Anzahl gut arbeitender Stationen vom Indischen Beben vom 4. April 1905, vom Calabrischen Beben am am 8. September 1905 und vom Kalifornischen Beben am 18. April 1906 die Laufzeitkurven für die wichtigsten in der Vorphase auftretenden Welleneinsätze aufgestellt. — Von einer direkten Vergleichung der Originalkurven oder ihrer Kopien musste allerdings abgesehen werden; Korrektionen an Herddistanz und Laufzeit wegen der Abplattung der Erde wurden nicht vorgenommen. — Die Kurven sind über D = 10 Megameter hinaus extrapoliert, indem angenommen wurde, dass die Geschwindigkeit grösserer Herddistanz entsprechender Strahlen in Schichten über 2500 km Tiefe sich nicht merklich mehr ändere. Neuere Beobachtungen deuten darauf hin, dass die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in 3000 und mehr Kilometer Tiefe wieder abnimmt. Ein sicherer Entscheid hierüber ist derzeit noch nicht möglich — einmal sind die Erdbebenstationen nicht dicht genug gesät, zum andern gelingt es oft nicht, bei sonst gut ausgeprägten Beben den Herd mit genügender Sicherheit festzustellen; in verhältnismässig seltenen Fällen liegt der Epizentralpunkt in bewohntem Gebiet. Das bisher benutzte rechnerische oder konstruktive Verfahren zu dessen Ermittelung ist nicht einer in allen Fällen genügenden Genauigkeit fähig. Man bestimmt die Herddistanz gewöhnlich aus der Differenz der Ankunftszeiten der I. und II. Vorläufer, die auf mindestens $\pm$ 6 sec. unsicher ist. — L. Geiger hat nun gezeigt,[2]) wie sich allein aus der mit $\pm$ 1 sec. Unsicherheit bestimmbaren Ankunftszeit der ersten Vorläufer die Herddistanz mit grosser Genauigkeit finden lasse, vorausgesetzt, dass der Wellen-

[1]) E. Wiechert und K Zoeppritz, über Erdbebenwellen I u. II, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1907; K. Zoeppritz u. L. Geiger, üb. Erdbebenwellen III, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1909.

[2]) Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, 1910, Heft 4.

einsatz in mindestens drei Stationen, die um weniger als 90° vom Herd abliegen, scharf beobachtet ist. — Das Verfahren wird jedenfalls für die Vervollständigung der Wiechert-Zoeppritzschen Laufzeitkurven sehr fruchtbar sich erweisen.

Resultate:

Es erübrigt noch, die von Wiechert durch Konstruktion, von Zoeppritz und Geiger auf rechnerischem Weg gefundenen Resultate, soweit sie von Interesse und für das folgende von Wichtigkeit sind, anzuführen. — Die folgende Tabelle enthält bis 1519 km Tiefe die Geschwindigkeiten der beiden Vorläufer und die Poissonsche Konstante. Zur Bestimmung dieser Konstanten ist die Kenntnis der Dichte im Erdinnern nicht erforderlich: sind a und b die Geschwindigkeiten der I. und II. Vorläufer, d. h.

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

so wird die Poissonsche Konsante

$$\sigma = \frac{a^2 - 2b^2}{2(a^2 - b^2)}.$$

Tiefe in Kilometer	a	b	σ
0	7,17	4,01	0,2578
100	7,59	4,24	0,2732
200	8,01	4,48	0 2724
300	8,42	4,71	0,2723
400	8,83	4,93	0,2736
500	9,22	5,16	0.2720
600	9,62	5,37	0,2737
700	10,00	5,59	0,2727
760	10,23	—	—
800	10,37	5,80	0,2724
900	10,73	6,01	0,2714
1000	11,07	6,21	0,2704
1100	11,42	6,41	0,2700
1200	11,75	6,61	0,2685
1300	12,08	6,80	0,2681
1316	—	6,83	—
1400	12,40	6,86	0,2795
1430	—	6,87	—
1500	12,72	—	—
1519	12,78	6,87	

a ist die Geschwindigkeit der ersten Vorläufer, b die der zweiten Vorläufer (in Kilometern gemessen). Die Geschwindigkeit beider Wellenarten wächst im Mantel nahezu linear an. Die letzte Kolumne enthält die Poissonsche Kontante. Im Kern ist a = konst. = 12,78 km, b = konst. = 6,87 km.

§ 5. Ueber die physikalische Beschaffenheit des Erdinnern.

Die in den Paragraphen 2 und 3 besprochenen Methoden zur Ermittelung der Elastizitätskonstanten der Erde legen in ihren Voraussetzungen (Inkompressibilität, Homogenität u. s. w.) eine elastische Konstante von vornherein mehr oder weniger fest und bestimmen dann für die andere einen Mittelwert, der eben als „Mittelwert" über etwaige Aenderungen der physikalischen Eigenschaften im Erdinnern nichts auszusagen vermag. Von grosser Bedeutung ist andererseits der Umstand, dass alle Methoden zu unter sich und mit den Wiechertschen Ergebnissen der Grössenordnung nach sehr wohl übereinstimmenden Resultaten gelangen. Hierin liegt vor allem der Nachweis der Berechtigung, auf den bis jetzt gegebenen Grundlagen weitergehende Untersuchungen aufzubauen.

Die Wiechertschen Forschungen, die wir im folgenden fast ausschliesslich verwerten werden, liefern die Werte für die Poissonsche Konstante und für die Verhältnisse $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ und $\frac{\mu}{\rho}$. — σ wird im Mittel zu 0,27 gefunden; d. h. zunächst: die Erde ist dem deformierenden Einfluss der Erdbebenwellen gegenüber nicht inkompressibel. Ferner liegt die Poissonsche Konstante für die Erde so nahe dem theoretischen auf der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und gewissen Annahmen über molekulare Kräfte beruhenden Wert 0,25, dass die für das Erdinnere gewöhnlich angenommenen exzessiven Verhältnisse durchaus nicht wahrscheinlich sind. — Die etwa mit den Wiechertschen Kompressibilitäten errechneten Verschiebungen an der Oberfläche sind absolut genommen gross, relativ zu den Dimensionen der ganzen Erde aber klein. Bedenkt man zudem, dass diese theoretischen Verschiebungen in Wirklichkeit nie eingetreten sind, dass jedes Zusammenziehen der Erde von einer im entgegengesetzten Sinn wirkenden Temperaturerhöhung begleitet ist, so wird man nicht annehmen wollen, dass in irgend einem Volumenelement im Erdinnern die mittlere Molekulardistanz sich so bedeutend geändert habe, dass das Prinzip der Superposition

nicht mehr gilt. Besteht aber das Gesetz der Superposition, so sind bei dem gefundenen Werte für die Poissonsche Konstante die Voraussetzungen, von denen die Theorie der Elastizität isotroper elastischer fester Körper ausgeht,[1]) erfüllt, und der Anwendung der gewöhnlichen elastischen Gleichungen auf geophysikalische Probleme steht nichts im Weg.

Aus den Quadraten der Wellengeschwindigkeiten $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ und $\frac{\mu}{\rho}$ liessen sich λ und μ berechnen, wenn die Dichteverteilung im Erdinnern bekannt wäre.

Die mittlere Erddichte wird zu 5,53 angegeben. Die Dichte der an der Oberfläche zu Tag tretenden Gesteine beträgt etwa 2,6. Also folgt sofort, dass gewisse Partien der Erde durch einen beträchtlichen Dichteüberschuss die verminderte Oberflächendichte kompensieren werden. — Die Wiechertsche Hypothese der Massenverteilung im Erdinnern — Steinmantel — Eisenkern — ist bekannt. Wiechert geht bei seinen Berechnungen aus von dem bekannten Wert der mittleren Erddichte und der angenähert angebbaren Dichte des Steinmantels. Jedem vorgegebenen Wert für die Dichte des Kerns entspricht eine bestimmte Grösse desselben und eine bestimmte Abplattung der Erde. In der von Wiechert gegebenen Tabelle, die unter Annahme der mittleren Dichte zu 5,53 und des mittleren Radius (r) von 6370 km berechnet ist

	$\delta = 3{,}0$	$\delta = 3{,}2$	$\delta = 3{,}4$	$\delta = 3{,}0$	$\delta = 3{,}2$	$\delta = 3{,}4$
ε		r'/r			δ'	
1/298	0,792	0,773	0,749	8,05	8,22	8,45
1/297	0,795	0,776	0,753	8,00	8,16	8,38
1/296	0,798	0,780	0,757	7,94	8,10	8,30

bedeutet ε die Abplattung, δ die willkürlich angenommene, aber innerhalb der Grenzen der Wahrscheinlichkeit sich bewegende Dichte des Steinmantels, δ' die Dichte des Kerns und r' seinen Radius. Die Tabelle zeigt, dass r' auf $^4/_5$ bis $^3/_4$ des mittleren Erdradius r zu schätzen ist. — Die Ergebnisse der seismischen Beobachtungen entsprechen der Hypothese der zweiteiligen Erde. Aus den Kurven, die die Scheiteltiefe der Strahlen als Funktion der Herddistanz darstellen, ergibt sich, dass bei beiden Vorläufern die Strahlen in Tiefen zwischen 1300 und 1600 km sich ausserordentlich zusammendrängen.

[1]) Vergl. C. Chree, Phil. Mag. (5. Ser.) vol. 32 (1891).

Die Scheitel der Strahlen für die Herddistanzen D = 5000 km und D = 6000 km liegen nur 196 km voneinander entfernt. — Noch deutlicher spricht die graphische Darstellung der Wellengeschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen. Die Geschwindigkeiten wachsen fast linear bis zu 1438 km (II. Vorl.) bezw. 1519 km (I. Vorl.) Tiefe, um dann plötzlich aber ohne Sprung konstant zu werden. Die plötzliche Aenderung der Kurvenrichtung und ihr weiterhin geradliniger Verlauf lässt sich wohl nur durch einen Wechsel des Aggregatzustandes oder dadurch erklären, dass das ganze Erdinnere oder doch ein grosser Teil desselben in mehr als 1500 km Tiefe aus einem von dem der Rinde verschiedenen Material gebildet ist. — Für das Verhältnis des Kernradius zum mittleren Radius der Erde ergibt sich, wenn man die Dicke des Steinmantels zu 1500 km annimmt, der Wert 0,765, der mit dem aus obiger Tabelle durch Interpolation für $\delta = 3{,}3$ erhaltenen Wert für r'/r recht wohl übereinstimmt.

Es scheint mir wichtig, darauf hinzuweisen, dass für die Wiechertsche zweiteilige Erde zunächst wohl nur die Tatsache spricht, dass die völlige Umgestaltung des Charakters der Geschwindigkeitskurven gerade an der hypothetischen Kernoberfläche einsetzt und dass eine Richtungsänderung weiterhin nicht mehr eintritt. Jedenfalls kann aus den Geschwindigkeitskurven fürs erste weder die Konstanz noch ein bestimmter Wert der Kerndichte oder gar eine bestimmte chemische Zusammensetzung des Kernmaterials erschlossen werden.

Die Geschwindigkeit der Dilatations- und der Schiebungswellen und eo ipso deren Quadrat wurde im Kern konstant gefunden. Damit ergibt sich auch das Verhältnis des Kompressionsmodul zur Dichte für den Kern als Konstante. $\frac{k}{\rho}$ ist aber konstant, wenn entweder k und ρ konstant sind, oder aber, wenn k und ρ im selben Verhältnis sich ändern. Letzteres Verhalten könnte vielleicht eine Aenderung des Aggregatzustandes andeuten. Aus der Gleichung k/ρ = konst. = a resultiert eine interessante Beziehung zwischen Druck und Volumen für ein Kernelement: Der Kompressionsmodul ist das Reziproke der Kompressibilität, und diese ist definiert als Kompression dividiert durch Druckzunahme, d. h. als $-\,dv/v \,.\, dp$ (v bedeutet das Volumen, p den Druck). Für die Masseneinheit ist $1/\rho = v$. Bezeichnet man nun den Kompressionsmodul mit k, so ist

$$k/\rho = \text{konst.} = a = -\,v^2 \,.\, dp/dv.$$

Durch Integration folgt

$$p = a/v + \text{konst.} = a/v + c$$

oder

$$p \,.\, v = a + c \,.\, v$$

und schliesslich

$$v \,.\, (p - c) = a$$

als eine Art von „Zustandsgleichung“ für den Stoff, aus dem der Kern gebildet ist. (Vergl. die van der Waals'sche Zustandsgleichung!)

Die abgeleitete Relation und das verschiedene Wachstum der Konstanten λ und μ in der Nähe der Kernoberfläche — μ erreicht sein Maximum schon in 1438 km Tiefe, λ wächst noch stark bis 1519 km — könnte immerhin für die Entscheidung der Frage: Materialverschiedenheit oder Aenderung des Aggregatzustandes einen Fingerzeig abgeben. Sehr fraglich ist allerdings, ob das Verhältnis des Kompressionsmodul zur Dichte für den Kern überhaupt oder doch in dem Sinne konstant ist, dass die Herleitung obiger „Zustandsgleichung“ gestattet wäre. —

Von besonderer Bedeutung für manche geophysikalische Probleme und zumal für unsere Zwecke ist die Kenntnis der Dichteverteilung in der Erde. — Analysiert man die Wiechertschen Geschwindigkeitskurven nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ, so gelangt man, wie ich im folgenden zeigen werde, zu einer recht guten Uebersicht über die Dichteverteilung im Erdinnern.

Wir nehmen zunächst an, die Erde sei durchweg von der Temperatur ihrer Oberfläche. Die Dichteänderung im Erdinnern hat dann entweder allein in der durch die Schwerkraft hervorgerufenen Dilatation oder in Materialverschiedenheit und gleichzeitiger Dilatation ihre Ursache. Wirkte also die Schwerkraft nicht, so wäre die Erde durchweg oder in konzentrischen — wie wir annehmen wollen — Schichten von gleicher Dichte. Diese „ursprüngliche“ Dichte, wie ich sie nennen will, d. i. also die Dichte, die vorhanden wäre, wenn die Schwerkraft nicht wirkte, möge mit ρ_0 bezeichnet werden. $\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho}$ lässt sich in Tiefen bis zu 1500 km in guter Annäherung als lineare Funktion von r in der Form $\alpha r + \beta$ darstellen. In über 1500 km Tiefe ist $\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} = \text{konst.} = 16{,}33 \,.\, 10^{11}$ c. g. s.

Führt man diese Werte in die Gleichung (2) des § 1 ein, so liefert sie uns ein „Dichtegesetz“ für die verschiedenen Schichten. — Der Verlauf der Geschwindigkeitskurve weist auf zwei Schichten von „ursprünglich“ konstanter Dichte hin: einen Kern von 4870 km

Halbmesser und den umschliessenden 1500 km dicken Mantel. — Die Gleichgewichtsgleichung (§ 1, 2) lautet nach Einführung der Dilatation

$$\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} \cdot \frac{\delta \Delta}{\delta r} = - R. \tag{4}$$

Die Massenkraft R wird im Kern durch

$$- \frac{f}{r^2} \int_0^r 4\,\pi\, r^2 \,.\, \rho \,.\, dr$$

im Mantel durch den Ausdruck

$$- \frac{f}{r^2} \int_{r_2}^r 4\,\pi\, r^2 \,.\, \rho \,.\, dr - \frac{b}{r^2}$$

dargestellt, worin r_2 den Radius des Kerns und b das Integral

$$f \,.\, \int_0^{r_2} 4\,\pi\, r^2\, \rho_\varkappa \,.\, dr$$

bedeutet. $\rho_\varkappa$ ist die Kerndichte, f die Gravitationskonstante. — Grenzt man vom Mantel eine äussere Schale von etwa 100 km Dicke ab, so ändert sich in ihr die Dichte, wie eine leichte Rechnung zeigt, bei jeder möglichen Massenverteilung im Erdinnern um noch nicht ein Halb vom Hundert. Für diese Schale können wir also ohne weiteres R = konst. = — 981 c. g. s. setzen. Wirklich vorhandene und „ursprüngliche“ Dichte sind durch die Relation

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + \Delta}$$

bezw. durch die in erster Annäherung geltende

$$\rho = \rho_0 \,(1 - \Delta)$$

miteinander verknüpft.

In der Schale ist die Massenkraft R = konst. = — g;

und

$$\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} = \alpha r + \beta.$$

Damit geht die Gleichung (4) in

$$(\alpha r + \beta) \frac{d\Delta}{dr} = g$$

über. Durch Einführen der neuen Variabeln $y = 1 - \Delta$ erhält man

$$(\alpha r + \beta) \frac{dy}{dr} = - g$$

und durch Integration

$$y = -\frac{g}{\alpha} \lg (\alpha r + \beta) + \text{konst.};$$

oder

$$y = \lg k_1 (\alpha r + \beta)^{-\frac{g}{\alpha}}.$$

Gemäss der Bedeutung von y ergibt sich also für die äussere Schale das Dichtegesetz

$$\text{(a)} \quad \underline{\rho = \rho_0 . \lg \left(k_1 . (\alpha r + \beta)^{-\frac{g}{\alpha}}\right).}$$

Für den Mantel fanden wir die Massenkraft

$$R = -\frac{f}{r^2} \int_{r_2}^{r} 4 \pi r^2 \rho \, dr \quad - \frac{b}{r^2}$$

oder

$$R = -\frac{f}{r^2} \int_{r_2}^{r} 4 \pi r^2 \rho_0 (1 - \Delta) \, dr \quad - \frac{b}{r^2}.$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit der Dilatationswellen wird durch $\alpha r + \beta$ dargestellt. Man hat also gemäss (4) die Gleichung

$$(\alpha r + \beta) \frac{d\Delta}{dr} = \frac{f . 4 \pi . \rho_0}{r^2} \int_{r_2}^{r} r^2 (1 - \Delta) \, dr \quad - \underline{\frac{b}{r^2}}$$

oder nach Multiplikation mit r^2, wenn man gleichzeitig die konstanten Faktoren des Integrals in n zusammenfasst,

$$r^2 (\alpha r + \beta) \frac{d\Delta}{dr} = n . \int_{r_2}^{r} r^2 (1 - \Delta) \, dr \quad - b.$$

Daraus resultiert durch Differentiation nach r

$$(\alpha r^3 + \beta r^2) \frac{d^2\Delta}{dr^2} + (3 \alpha r^2 + 2 \beta r) \frac{d\Delta}{dr} = n . r^2 (1 - \Delta).$$

Dividiert man durch r^2 und setzt $y = 1 - \Delta$, so erhält man die Differentialgleichung

$$(\alpha r + \beta) \, y'' + (3 \alpha + \frac{2}{r} \beta) \, y' + n . y = 0;$$

sie lässt sich durch eine bekannte Transformation auf einen speziellen Fall der allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung reduzieren. Die Lösung in geschlossener Form vermittels bekannter Funktionen ist wohl nicht möglich. —

Die Massenkraft im Kern ist

$$R = -\frac{f}{r^2}\int_0^r 4\,\pi\,r^2\,\rho\,.\,dr$$

und mit der Beziehung $\rho = \rho_0\,(1-\Delta)$

$$R = -\frac{f}{r^2}\int_0^r 4\,\pi\,r^2\,\rho_0\,(1-\Delta)\,dr.$$

Im Kern gilt die Relation

$$\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} = \text{konst.} = a.$$

Die Gleichgewichtsgleichung schreibt sich also

$$a\,\frac{d\Delta}{dr} = \frac{f}{r^2}\int_0^r 4\,\pi\,r^2\,\rho_0\,(1-\Delta)\,dr$$

oder, wenn m den Ausdruck $\frac{4\,\pi\,.\,\rho_0\,.\,f}{a}$ bedeutet,

$$\frac{d\Delta}{dr} = \frac{m}{r^2}\int_0^r r^2\,(1-\Delta)\,dr.$$

Multipliziert man mit r^2 und differenziert nach r, so folgt

$$r^2\,\frac{d^2\Delta}{dr^2} + 2\,r\,\frac{d\Delta}{dr} = m\,r^2\,(1-\Delta).$$

Mittels der Transformation $1 - \Delta = y$ und nach Division durch r^2 geht diese Gleichung in

$$y'' + \frac{2}{r}\,y' + m\,y = 0$$

über. Ein partikuläres Integral letzterer Differentialgleichung sei

$$y_1 = a_0 + a_1\,.\,r + a_2\,.\,r^2 + a_3\,.\,r^3 + \ldots\ldots$$

Die Koeffizienten berechnen sich zu $a_1 = 0 = a_3 = a_5 = \ldots$

$a_2 = -\,m\,.\,a_0/3!$; $a_4 = a_0\,.\,m^2/5!$; $a_6 = -\,a_0\,.\,m^3/7!$ u. s. w.

Also folgt

$$y_1 = a_0\,.\,(1 - m\,.\,r^2/3! + m^2\,.\,r^4/5! - m^3\,.\,r^6/7! + \ldots)$$

oder

$$y_1 = \frac{a_0}{\sqrt{m}}\,.\,\frac{\sin\,(\sqrt{m}\,.\,r)}{r} = c_1\,.\,\frac{\sin\,(\sqrt{m}\,.\,r)}{r}.$$

Daraus ergibt sich das allgemeine Integral

$$y = y_1 \left[c_1 + c_2 \int \frac{dr}{y_1^2} \cdot e^{-\int \frac{2}{r} dr} \, dr \right]$$

in der Form

$$y = \frac{c_1 \cdot \sin(\sqrt{m} \cdot r) + c_0 \cos(\sqrt{m} r)}{r}.$$

Die gefundene Lösung muss der Gleichung

$$r^2 \frac{dy}{dr} = -m \int_0^r y \, r^2 \, dr$$

genügen. Durch Einsetzen findet man $c_0 = 0$ und es bleibt

$$y = 1 - \Delta = c_1 \cdot \frac{\sin(\sqrt{m} r)}{r};$$

daraus resultiert unmittelbar das Dichtegesetz für den Kern

(b) $$\rho = \rho_0 \cdot c_1 \cdot \frac{\sin(\sqrt{m} \cdot r)}{r}.$$

In der Konstanten

$$m = \frac{4 \pi \rho_0 \cdot f}{a}$$

sind für f und a die Zahlenwerte $6{,}658 \cdot 10^{-8}$ c. g. s. bezw. $16{,}33 \cdot 10^{11}$ c. g. s. (vergl. Tabelle auf Seite 34) zu setzen.

In einer homogenen Erde nimmt die Schwerkraft mit dem Radius ab. Folgen aber nach innen zu Schichten mit erhöhter Dichte, wie es bei der Erde wirklich der Fall ist, so wird die Abnahme der Schwere im Mantel merklich langsamer vor sich gehen, unter Umständen zum Stillstand kommen oder gar in einen Zuwachs übergehen. An der Oberfläche des Wiechertschen Kerns z. B. ($\rho_\varkappa = 8{,}2$) ist $g = 1113{,}7$. Der Fehler wird also im schlimmsten Fall $\pm$ 10 % nicht übersteigen, den wir begehen, wenn wir im Mantel die Massenkraft konstant etwa gleich 1000 c. g. s. setzen. Wird aber die Massenkraft im Mantel als konstant angenommen, so gilt auch für ihn das für die äussere Schale abgeleitete Dichtegesetz:

$$\rho = \rho_0 \cdot \lg \left(k_1 (\alpha r + \beta)^{-\frac{g}{\alpha}} \right).$$

Die Konstanten der Dichtegesetze bleiben wegen der noch fehlenden Lösung der Differentialgleichung für den Mantel zunächst unbestimmt; die Dichten lassen sich deshalb nicht direkt auswerten.

Wohl aber sind die Dichteänderungen in Kern und Mantel leicht angebbar.

Subtrahiert man irgend zwei Dichtewerte im Mantel, so fällt k_1 heraus. Man erhält so für den zpeziellen Fall der Differenz zwischen der Dichte an der Grenzfläche gegen den Kern und der Oberflächendichte

$$\rho_{\text{Kern-Ob.}} - \rho_{\text{Oberfl.}} = -\rho_0 \frac{g}{\alpha} \lg \left(\frac{\alpha r_2 + \beta}{\alpha r_0 + \beta} \right),$$

worin r_2 den Radius des Kerns, r_0 den Grenzradius der Erde bedeutet. Für die verschiedenen Konstanten gelten die Zahlenwerte in absoluten Einheiten:

$$g = 1000;\ \alpha = -7{,}36.10^3;\ \alpha r_0 + \beta = 5{,}14.10^{11};\ \alpha r_2 + \beta = 16{,}18.10^{11}.$$

Damit ergibt sich

$$\rho_{\text{Kern-Ob.}} - \rho_{\text{Oberfl.}} = 0{,}156 \cdot \rho_0$$

d. h. die absolute Dichteänderung im Mantel beträgt 15,6% der „ursprünglichen" Manteldichte,

also 0 für $\rho_0 = 0$; 0,156 für $\rho_0 = 1$; 0,312 für $\rho_0 = 2$; 0,468 für $\rho_0 = 3$.

Der Quotient irgend zweier Kerndichten ist unabhängig von der willkürlichen Konstanten des Dichtegesetzes. Ich habe im folgenden das Verhältnis der Dichte im Erdmittelpunkt zur Dichte an der Kernoberfläche für die „ursprünglichen" Kerndichten $\rho_0 = 1, 2, 3, \ldots, 7, 8$ berechnet und in nachstehender Tabelle zusammengestellt. Die zweite Kolumne enthält noch die Aenderungen der Dichte im Kern in Prozenten der Dichte an der Kernoberfläche.

„Urspr. Dichte"	D. Mi./D. K. Ob.	Dichtezuw. in % d. D. a. d. K. Ob.
0	1,0	0
1	1,0205	2,05
2	1,0417	4,17
3	1,0634	6,34
4	1,0859	8,59
5	1,1089	10,89
6	1,1327	13,27
7	1,1572	15,72
8	1,1825	18,25

Bemerkt sei noch, dass, wenn man $\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho}$ im Mantel konstant und im Mittel zu $10{,}74 \cdot 10^{11}$ c. g. s. annimmt, für den Mantel — von Konstanten abgesehen — dasselbe Dichtegesetz resultiert wie für den Kern. Die Dichteänderung im Mantel ergibt sich so zu 7,17 % der Dichte an der Erdoberfläche (die „ursprüngliche" Manteldichte zu 3 angenommen). — Letzterer Wert ist wahrscheinlich mit einem erheblichen Fehler belastet, da die Quadrate der Geschwindigkeiten der Dilatationswellen im Mantel um 200% anwachsen.

Nimmt man für den Mantel die „ursprüngliche" Dichte ρ_0 gleich der Dichte der zu Tag liegenden Gesteine, also etwa zu 2,5 an, so erhält man nach dem oben gegebenen Resultat als absolute Dichteänderung im Mantel rund 0,38. Die ursprüngliche Oberflächendichte kennen wir allerdings nicht — die Oberflächenschichten der theoretischen Erde sind durch Transversaldrucke schon merklich komprimiert. Wir wissen aber aus der zuletzt abgeleiteten Beziehung, dass die absolute Dichteänderung im Mantel (0,38) 7,2% oder sagen wir, da dieser Wert jedenfalls schon weit vom wirklichen abweicht, 10% der Oberflächendichte beträgt. Wir erhielten also an der Oberfläche bezw. an der innern Grenzfläche des Mantels die Dichten 3,8 bezw. 4,18. Der Mantel hätte damit die mittlere Dichte 4. Das starke Anwachsen der Temperatur im Mantel wird diese Dichte noch um einige Einheiten der ersten Dezimale vermindern. — Mit dem wahrscheinlicheren Wert $\rho_0 = 2{,}7$ ergeben sich, wenn man die absoluten Aenderungen beidemal als gleich annimmt, 3,1 als Oberflächendichte und 3,5 als Dichte an der innern Mantelfläche. — Nach den vorgängigen Ausführungen liegt also die mittlere Dichte des Mantels jedenfalls zwischen 3 und 4.

Wollten wir nun annehmen, der Kern bestehe aus demselben Material wie der Mantel, so hätten wir an der Kernoberfläche mit einer Dichte von höchstens 4 zu rechnen. Nach der Tabelle der Seite 30 beträgt aber die Dichteänderung im Kern für $\rho_0 = 2{,}5$ etwas über 5% der Dichte an der Kernoberfläche, d. h. etwa 0,2, wenn letztere zu 4 angenommen wird. Die mittlere Kerndichte ergibt sich so zu 4,1.

Mit einer Kerndichte von 4,1 und einer um 3,5 liegenden Manteldichte ist aber die mittlere Dichte der Erde (5,53) bei weitem nicht erreicht. Die Dichtezunahme nach dem Erdinnern lässt sich also nur durch eine Aenderung des Erdmaterials erklären.

Bewegt sich die Dichte des Mantels zwischen 3 und 4, so verlangt der an der Erdoberfläche beobachtete Schwerewert eine bei 8 liegende mittlere Kerndichte. Wird die Dichte der Kernoberfläche zu 8 angenommen, so folgt aus der auf Seite 30 gegebenen Tabelle die folgende:

Urspr. Dichte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dichte im Mittelpunkt	8,0	8,16	8,33	8,51	8,69	8,87	9,06	9,26	9,46

Sie zeigt uns, dass für alle etwa möglichen Werte der ursprünglichen Dichte die mittlere Kerndichte zwischen 8 und 9 liegt. Für $D_{\text{Kern-Ob.}} = 7$ ergibt sich mit einem zwischen 7 und 8 liegenden Wert die Kerndichte als zu klein. Daraus folgt umgekehrt, dass die Dichte an der Kernoberfläche grösser als 7 sein muss. Besteht der Kern aus Eisen, so könnte man die „ursprüngliche" Dichte ρ_0 etwa wegen der sehr hohen Temperatur im Kern zu 7,5 annehmen und weiter voraussetzen, dass durch den Druck die Temperaturdilatation an der Kernoberfläche eben wieder rückgängig gemacht sei, dass also die Dichte an der Kernoberfläche ungefähr 7,8 betrage. Die mittlere Kerndichte resultierte dann zu 8,55, einige Einheiten der ersten Dezimale sind wieder der hohen Temperatur wegen abzuziehen, und es ergibt sich so zwangslos der Wiechertsche Wert 8,2 für die Kerndichte. — Wir hatten bei der Ableitung der Dichtegesetze die Temperaturänderungen im Erdinnern vernachlässigt. Besonders bemerkenswert ist, dass die für den Kern gefundene Formel

$$\rho = \rho_0 \cdot c_1 \frac{\sin(\sqrt{m}\, r)}{r}$$

auch für die herrschenden sehr hohen Temperaturen zwar nicht die Dichte selbst, wohl aber den Dichteverlauf in erster Annäherung richtig wiedergibt, weil mit einer beträchtlichen Temperaturzunahme im Kern nicht mehr zu rechnen ist. —

Als Resultat der vorstehenden Deduktionen ergibt sich nun eine sehr gute Bestätigung der Wiechertschen Hypothese:

Die Erde ist nicht aus einheitlichem Material aufgebaut. Besteht sie aus nur zwei dem Material nach verschiedenen Schichten mit den Grenzradien $r = 4870$ km und $r = 6370$ km, so liegt die mittlere Dichte der äusseren Schicht (Mantel) etwas über 3, die der innern (Kern)

einiges über 8. Innerhalb beider Schichten variiert die Dichte nur wenig.

Ueber die chemische Beschaffenheit bezw. den Aggregatzustand des Erdkerns lässt sich zunächst nur soviel sagen, dass er, wenn er fest oder flüssig ist, jedenfalls aus einem Stoff besteht, dessen Dichte auch im undilatierten Zustand nahe bei 8 liegt. Befindet sich der Kern im gasförmigen Aggregatzustand, so käme, wenn man aus der van der Waals'schen Gleichung die Dichte wenigstens angenähert erschliessen dürfte, wahrscheinlich nur eines der leichtesten Gase, etwa Wasserstoff, als Kernmaterial in Betracht (vergl. auch unten Seite 63). Für die meisten Gase liegen bei den zu erwartenden Temperaturen und bei dem herrschenden Druck die Dichten wohl weit über 8. — Das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Kernmaterials ergibt sich, vorausgesetzt, dass man die üblichen Formeln anwenden darf, zu 1,62. —

Der Aggregatzustand des Erdinnern ist für viele geophysikalischen Fragen und namentlich für das Problem der Gebirgsbildung durchaus nicht von nebensächlicher Bedeutung. Definiert man Gas als einen Körper, der den ganzen ihm zur Verfügung stehenden Raum ausfüllt, so erkennt man sofort das abweichende Verhalten eines flüssigen oder festen, oder eines im gasförmigen Zustand sich befindenden Kerns. Hörte die Schwerkraft plötzlich auf zu wirken, so würde die Erde — falls der Kern gasförmig wäre — mit furchtbarer Gewalt explodieren. Etwaige Risse und Spalten im Mantel würden durch Kernmaterial vollständig ausgefüllt. (Vergl. das Verhalten eines mit Wasser und eines mit Dampf von jeweils 10 Atmosphären Druck gefüllten Kessels!).

Als wahrscheinlichste Dichtewerte gibt Wiechert für den Mantel 3,3, für den Kern 8,2 an. Die nachstehende Tabelle ist unter Zugrundlegung dieser Werte berechnet, sie enthält die Quadrate der Geschwindigkeiten der I. und II. Vorläufer (v_d^2 und v_s^2), die Konstanten $\lambda + 2\,\mu$, λ, μ und den Kompressionsmodul k. Anschliessend sind die elastischen Konstanten als Funktionen des Radius dargestellt.

Tiefe in km.	v_d^2 in 10^{11} c. g. s.	$\lambda + 2\mu$ in 10^{12} c. g. s.	v_s^2 in 10^{11} c. g. s.	μ in 10^{12} c. g. s.	λ in 10^{12} c g. s.	k in 10^{12} c. g. s
0	5,1409	1,6965	1,6000	0,5280	0,6405	0,9925
100	5,7760	1,9061	1,7978	0,5933	0,7195	1,1150
200	6,4160	2,1173	1,9981	0,6594	0,7985	1,2381
300	7,0896	2,3396	2,2090	0,7290	0,8816	1,3676
400	7,7969	2,5730	2,4305	0,8021	0,9688	1,5035
500	8,5193	2,8114	2,6523	0,8752	1,0610	1,6445
600	9,2544	3,0540	2,8837	0,9516	1,1508	1,7852
700	10,0000	3,3000	3,1248	1,0312	1,2376	1,9251
760	10,4652	3,4535				
800	10,7537	3,5487	3,3640	1,1101	1,3258	2,0659
900	11,5133	3,7994	3,6000	1,1880	1,4234	2,2154
1000	12,2545	4,0440	3,8564	1,2726	1,4988	2,3472
1100	13,0645	4,3113	4,1088	1,3559	1,5995	2,5034
1200	13,8063	4,5561	4,3560	1,4375	1,6811	2,6394
1300	14,5926	4,8156	4,6240	1,5259	1,7638	2,7811
1316			4,6649	1,5394		
1400	15,3760	5,0741	4,7060	1,5530	1,9681	3,0034
1430			4,7197	1,5575		
1500	16,1798	5,3393			2,2243	
1519	16,3328	5,3898			2,2748	

Für den Kern ist $\lambda + 2\,\mu = 13{,}3929 \cdot 10^{12}$ c. g. s. $\mu = 3{,}8701 \cdot 10^{12}$ c. g. s.; $\lambda = 5{,}6527 \cdot 10^{12}$ c. g. s.; $k = 8{,}2328 \cdot 10^{12}$ c. g. s.

Im Mantel: $v_d^2 = 5{,}1731 \cdot 10^{12} - 7{,}36 \cdot 10^3 \cdot r$;

$v_s^2 = 1{,}6314 \cdot 10^{12} - 2{,}326 \cdot 10^3 \cdot r$;

$\lambda + 2\,\mu = 17{,}0712 \cdot 10^{12} - 24{,}288 \cdot 10^3 \cdot r$;

$\lambda = 6{,}3042 \cdot 10^{12} - 8{,}938 \cdot 10^3 \cdot r$; $\mu = 5{,}3835 \cdot 10^{12} - 7{,}675 \cdot 10^3 \cdot r$.

Für die äussere 100 km dicke Schale ist

$v_d^2 = 4{,}5597 \cdot 10^{12} - 6{,}351 \cdot 10^3 \cdot r$; $v_s^2 = 1{,}4200 \cdot 10^{12} - 1{,}978 \cdot 10^3 \cdot r$;

$\lambda + 2\,\mu = 15{,}0469 \cdot 10^{12} - 20{,}9583 \cdot 10^3 \cdot r$; $\mu = 4{,}6860 \cdot 10^{12} - 6{,}5274 \cdot 10^3 \cdot r$;

$\lambda = 5{,}6750 \cdot 10^{12} - 7{,}9035 \cdot 10^3 \cdot r$.

(Alle Konstanten sind in C. G. S-Einheiten angegeben.)

Für Flüssigkeiten ist μ bekanntlich Null. Es wäre nun aber mindestens voreilig, aus den in der Tabelle gegebenen grossen Werten für die Riegheit (μ) schliessen zu wollen, dass der Stoff, aus dem die tieferen

Schichten der Erde bestehen, nicht ähnlich wie eine Flüssigkeit sich verhalten könne oder, dass das ganze Erdinnere notwendig im festen Aggregatzustand sich befinden müsse. — Kanadabalsam, Pech, Gläser, u. s. w. zeigen, dass ein und derselbe Körper rasch wechselnden Kräften gegenüber sehr steif sein kann, während er gegen langdauernde Kräfte wie eine Flüssigkeit sich verhält. „Sehr wahrscheinlich bietet uns die Erde im Ganzen oder wenigstens mit ihrer Rinde einen ähnlichen Fall, indem sie sich gegenüber den bei Erdbeben im Laufe von Sekunden oder Minuten, bei der Ebbe und Flut im Laufe von Stunden oder Tagen, bei den Polschwankungen im Laufe von Monaten variierenden Kräften als sehr riege erweist und dennoch nachgiebig wie eine Flüssigkeit ist gegenüber den in Jahrtausenden und Jahrmillionen variierenden Kräften infolge von geologischen Umgestaltungen oder von kosmischen Aenderungen ihrer Rotationsgeschwindigkeit.“ [1])

Je nach der Dauer der Einwirkung der deformierenden Kraft werden die Werte für die Steifigkeit und die anderen elastischen Konstanten — die Kompressibilität vielleicht ausgenommen — sehr verschieden ausfallen. — Nun ergibt ein Vergleich der Abplattung mit der Nutation und Präzession, dass in der Erde in grosser Annäherung wenigstens hydrostatisches Gleichgewicht besteht. Auch den Schwerebeobachtungen entspricht die Annahme hydrostatischer Schichtung. Die Abweichungen von derselben erstrecken sich auf eine äussere Schale bis zu einer Tiefe von etwa 120 km. Diese Kruste ist so beschaffen, dass über einer Niveaufläche in der Tiefe auf gleich grossen Flächenelementen annähernd gleich grosse Massen lagern, wobei aber diesen Flächenelementen lineare Dimensionen von einigen Hundert Kilometern zukommen („Isostatie“).

Hydrostatisches Gleichgewicht ist aber nur dann möglich, wenn μ gegen λ vernachlässigt werden kann.

Zoeppritz zeigte in einer hinterlassenen, unvollendeten Arbeit, dass sehr verschiedene Annahmen über die Konstitution des Erdinnern zu sehr wenig verschiedenen Laufzeitfunktionen führen. Er berechnete das Bodenverrückungsverhältnis der einmal reflektierten zu den direkten Longitudinalwellen verschieden ferner Beben für eine homogene und verschieden angenommene mehrteilige Erden. Dieses Verhältnis ist ein sehr empfindliches Kriterium für die Kon-

[1]) E. Wiechert, üb. Erdbebenwellen I, pg. 5 (Aus d. Nachr. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, math.-phys. Kl., 1907).

stitution des Erdinnern. Eine homogene Erde ergab sich als mit den Beoeachtungen völlig unvereinbar.

L. Geiger und B. Gutenberg[1]) zeigten nun durch Kombination der Beobachtungen über das Amplitudenverhältnis longitudinaler Wellen mit den Zoeppritzschen Laufzeitbeobachtungen an Dilatationswellen, dass statt der einen Unstetigkeitsfläche in ca. 1500 km Tiefe deren drei vorhanden sind. Die Geschwindigkeitszunahme erfolgt in drei Stufen; die drei Unstetigkeitsflächen liegen in 1194 $\pm$ 50, 1677 $\pm$ 100, 2436 $\pm$ 150 Kilometer Tiefe. — Die dem vorläufigen Bericht beigegebenen Kurven bestätigen die von vornherein zu erwartende Tatsache, dass Kern und Mantel nicht scharf gegeneinander abgegrenzt sind; Mantel- und Kernmaterial gehen allmählich in einander über. — Die Geschwindigkeit der Dilatationswellen im Kern ist etwas grösser als bei Wiechert. Bis 1200 km Tiefe stimmen die nach beiden Methoden gefundenen Wellengeschwindigkeiten ausserordentlich gut überein. — Im übrigen wird an den Resultaten dieses Paragraphen nichts wesentliches geändert.

§ 6. Die Spannungsverteilung im Erdinnern.

Im folgenden habe ich versucht, die durch die gegenseitige Gravitation der Teile im Erdinnern verursachte Spannung unter verschiedenen Annahmen bezüglich der Dichteverteilung und der elastischen Eigenschaften zu berechnen. Die Kenntnis des Anfangszustandes ist zur Lösung des Problems nicht erforderlich. Die Grenzbedingungen genügen jeweils zur Bestimmung der Konstanten. — Von der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt wurde abgesehen. Der Einfluss der Rotation und der Temperaturzunahme nach dem Erdinnern ist nicht berücksichtigt. — Die Massenkraft wirkt radial; die nicht in die Richtung des Radius fallenden Verschiebungen sind Null. Wir gehen dementsprechend von der Gleichung

$$(\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r}\,U\right) + \rho R = 0$$

(8 1, 2) aus, deren Integral wir zu

$$U = \frac{1}{r^2}\left[K + \int\left(\int R_1\,dr + a\right).\,r^2\,dr\right]$$

[1]) Vergl. den vorl. Bericht von L. Geiger und B. Gutenberg in der Physikal. Zeitschrift, 12. Jahrg. 1911, pag. 814.

fanden. — K und a sind die Integrationskonstanten. Es ist

$$R_1 = - \frac{\rho \cdot R}{\lambda + 2\,\mu},$$

worin R die Massenkraft bedeutet.

$$\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r} U$$

stellt die Dilatation dar. Die Spannungskomponenten sind durch

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\,\mu) \frac{\delta U}{\delta r} + 2\,\lambda \frac{U}{r} \qquad \text{radial}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = \widehat{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\delta U}{\delta r} + 2\,(\lambda + \mu) \frac{U}{r} \qquad \text{transversal}$$

gegeben.

Fall I.

Die Erde sei fest und kompressibel. Die Dichte ρ und die elastischen Konstanten λ, μ werden als durchweg konstant angenommen.

Bezeichnet f die Gravitationskonstante und g den Schwerewert an der Erdoberfläche, so hat die Massenkraft (Kraft auf die Masseneinheit) in irgend einem Punkt der Niveaufläche r den Wert

$$R = - f \,.\, M/r^2 = - \frac{f \,.\, 4\,\pi \,.\, r^3 \,.\, \rho}{3\,r^2} = - \frac{f \,.\, 4\,\pi \,.\, \rho \,.\, r}{3} = - g \,.\, r/r_0,$$

wenn r_0 den Grenzradius der Kugel bedeutet. Es wird in unserm Fall

$$R_1 = - \frac{\rho}{\lambda + 2\,\mu} R = \frac{\rho \cdot g}{(\lambda + 2\,\mu)\, r_0} r,$$

und damit resultiert die Verschiebung

$$U = \frac{1}{r^2}\left[K + \int \left(\frac{\rho \cdot g}{2(\lambda+2\mu) r_0} \cdot r^2 + a\right) r^2 dr\right] = \frac{1}{r^2}\left[K + \frac{\rho \cdot g}{10(\lambda+2\mu) r_0} \cdot r^5 + \frac{a}{3} r^3\right].$$

Die Integrationskonstanten K und a bestimmen sich den Grenzbedingungen gemäss:

Die Verschiebung im Erdmittelpunkt ist Null.

Die Radialspannung verschwindet an der Oberfläche.

Aus den entsprechenden Gleichungen

$$U\Big|_{r=0} = 0; \quad (\lambda + 2\,\mu) \frac{\delta U}{\delta r}\Big|_{r=r_0} + 2\,\lambda \frac{U}{r}\Big|_{r=r_0} = 0$$

folgt

$$K = 0, \quad a = -\frac{3\,g\,\rho\,r_0\,(5\,\lambda + 6\,\mu)}{10\,(\lambda + 2\,\mu)\,(3\,\lambda + 2\,\mu)};$$

die Verschiebung wird also

$$U = -\frac{g\,\rho\,r_0 \cdot r}{10\,(\lambda + 2\,\mu)}\left[\frac{5\,\lambda + 6\,\mu}{3\,\lambda + 2\,\mu} - \frac{r^2}{r_0^2}\right].$$

Aus der Verschiebung berechnen sich radiale und transversale Spannung zu

$$\widehat{rr} = -\frac{g\,\rho\,r_0\,(5\,\lambda + 6\,\mu)}{10\,(\lambda + 2\,\mu)} \cdot \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = \widehat{\varphi\varphi} = -\frac{g \cdot \rho \cdot r_0}{10\,(\lambda + 2\,\mu)} \cdot \frac{(5\,\lambda + 6\,\mu)\,r_0^2 - (5\,\lambda + 2\,\mu)\,r^2}{r_0^2}.$$

Die Spannungsdifferenz D, d. i. die Differenz zwischen Radialspannung und Spannung senkrecht zum Radius in irgend einem Punkt (vergl. Anhang Seite 64) ist

$$\left|\widehat{rr} - \widehat{\varphi\varphi}\right| = 2\,\mu\,\frac{g\,\rho\,r^2}{5\,(\lambda + 2\,\mu)\,r_0} = \frac{g\,\rho\,r^2}{5\,r_0}\,\frac{1 - 2\,\sigma}{1 - \sigma}.$$

Es ist

$$\frac{\delta U}{\delta r} = -\frac{g \cdot \rho \cdot r_0}{10\,(\lambda + 2\,\mu)}\left[\frac{5\,\lambda + 6\,\mu}{3\,\lambda + 2\,\mu} - \frac{3\,r^2}{r_0^2}\right].$$

Aus $\frac{\delta U}{\delta r} = 0$ folgt also

$$r^2 = \frac{r_0^2}{3}\,\frac{5\,\lambda + 6\,\mu}{3\,\lambda + 2\,\mu}$$

Aus der Relation

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)}$$

erhält man

$$\lambda = \frac{-2\,\sigma\,\mu}{2\,\sigma - 1}.$$

Führt man diesen Wert in die rechte Seite von r^2 ein, so ergibt sich

$$r^2 = r_0^2\,\frac{3 - \sigma}{3\,\sigma + 3}; \quad r = r_0\sqrt{\frac{3 - \sigma}{3 + 3\,\sigma}}$$

d. h. die Verschiebung erreicht ihren grössten Wert auf der durch

$$r = r_0 \cdot \sqrt{\frac{3 - \sigma}{3 + 3\sigma}}$$

bestimmten Niveaufläche. —

Die Erde entspricht nun sicher nicht den bei Fall I gemachten Annahmen. Immerhin geben die Formeln, die ihrer relativen Einfachheit wegen mathematischer Umgestaltung noch gut zugänglich sind, einen Ueberblick über die wichtigsten auch in den unten folgenden komplizierteren Fällen zu erwartenden und eintretenden Erscheinungen.

Ich schliesse noch einige Folgerungen an: Wird die Riegheit gleich Null angenommen oder doch als relativ zu λ sehr klein vorausgesetzt, so wird der Radialdruck dem transversalen Druck gleich. Für $rr = \varphi\varphi$ ergibt sich mit $\frac{-g \cdot \rho}{2} \cdot \frac{r_0^2 - r^2}{r_0}$ genau die Spannung, die in einer flüssigen Kugel von derselben Dichte und Grösse den hydrostatischen Grundgleichungen gemäss herrschen müsste.

Die Spannungsdifferenz in irgend einem Punkt der Kugel lässt sich mit Hilfe der Beziehung

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

in der bemerkenswerten Form darstellen

$$D = \frac{g \cdot \rho \cdot r^2}{5\, r_0} \cdot \frac{1 - 2\,\sigma}{1 - \sigma};$$

sie enthält also nur die eine elastische Konstante σ. — Die Spannungsdifferenz erreicht an der Oberfläche ihren grössten Wert. Mit wachsender Tiefe nimmt sie rasch ab; im Erdmittelpunkt sind radiale Spannung und Seitenspannung gleich gross.

Die Verschiebung erreicht ihren grössten Betrag, wie wir sahen, nicht etwa an der Kugeloberfläche, sondern in der durch

$$r = r_0 \sqrt{\frac{3 - \sigma}{3 + 3\sigma}}$$

bestimmten Niveaufläche. Für den Grenzradius $r_0 = 6370$ km und $\sigma = 0.27$ (Mittelwert nach Wiechert) liegt das Verschiebungsmaximum in 980 km Tiefe. Die radiale Verzerrung besteht ausserhalb der Fläche grösster Verschiebung in Dehnung, innerhalb in Kontraktion. Denkt man sich also in der nicht verzerrten Kugel eine Anzahl Stäbe auf einem Radius abgegrenzt, so sind nach der Ver-

schiebung die ausserhalb der Niveaufläche maximaler Verschiebung liegenden Stäbe sämtlich verlängert, die im Innern vorhandenen dagegen verkürzt. — Betrachtet man die durch die Oberfläche und die Fläche grösster Verschiebung begrenzte Kugelschale vor und nach der Verschiebung, so findet man nachher die Dicke der Schale grösser als zuvor. Im übrigen ist die Differenz zwischen Maximal- und Oberflächenverschiebung im Verhältnis zur ganzen Verschiebung sehr klein. —

Ich habe für eine Kugel mit den elastischen Konstanten

$$\mu = 1{,}65 \cdot 10^{12} \text{ c. g. s.}, \quad \lambda = 2{,}47 \cdot 10^{12} \text{ c. g. s.}$$

(vergl. die Tabelle auf Seite 34) und der Dichte und Grösse der Erde ($\rho = 5{,}53$; $r_0 = 6370$ km) die Spannungen für einige Tiefen berechnet und mit dem zum Vergleich beigefügten Druck (p) in einer entsprechenden inkompressibeln flüssigen Erde in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Tiefe in km.	$\widehat{rr}$ in 10^6 c. g. s.	$\widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.	p in 10^6 c. g. s.
0	0	395300	0
30	12500	404100	16200
500	201000	536700	260600
1000	385500	666500	499900
1500	553700	784800	717900
4000	1148000	1203000	1489000
6370	1333000	1333000	1709000

Fall II.

Die Erde bestehe aus einem inkompressibeln Kern mit der konstanten Dichte ρ_2 und dem Radius r_2, einer inkompressibeln flüssigen Magmaschicht von der Dichte ρ_1 und dem Radius r_1 und einer äusseren festen kompressibeln Schale mit

a) unveränderlichen elastischen Eigenschaften ($\lambda = \text{konst.}$, $\mu = \text{konst.}$) mit der Dichte der vorigen Schicht und dem Oberflächenradius r_0.

b) mit einem mit der ersten Potenz des Radius wachsenden Wert von $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ und dem Oberflächenradius r_0.

Die Massenkraft im Kern bestimmt sich wie bei der homogenen Erde (Fall 1) zu $-g_2 \cdot r/r_2$, wo g_2 den Schwerewert an der Oberfläche des Kerns bedeutet. — Im Kern herrscht hydrostatisches Gleichgewicht. Der Druck im Kerninnern bestimmt sich also den hydrostatischen Grundgleichungen gemäss aus $\frac{\delta p}{\delta r} = \rho \cdot R$

zu

$$p = \rho \cdot \int R\, dr + b;$$

b ist die Integrationskonstante. Führt man nun für R den gefundenen Betrag der Massenkraft ein, so ergibt sich im Kern der Druck

$$p_{\text{Kern}} = -\frac{\rho \cdot g_2}{2\, r_2}\, r^2 + b.$$

Auf jede Masseneinheit der Magmaschicht, die wir kurz als Mantel bezeichnen wollen, wirkt einmal die Anziehung, des Kerns mit dem Radius r_2 und der Dichte ρ_2; dazu kommt die Gravitation der zwischen dem Niveau des betrachteten Punktes und der Kernoberfläche liegenden Schichten von der Dichte ρ_1. Die Masse dieser Schichten entspricht der Masse einer Vollkugel mit dem Radius r des betreffenden Niveaus vermindert um die Masse der Kugel vom Radius des Kerns und der Dichte des Mantels.

Im Mantel ergibt sich also die Massenkraft

$$R = -f\frac{M}{r_2} = -f\frac{1}{r^2}\left[\frac{4}{3} r_2^3 \pi \cdot \rho_2 + \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \rho_1 - \frac{4}{3} r_2^3 \pi \rho_1\right]$$

$$= -f\frac{\pi}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\left[r_2^3 \cdot \rho_2 + r^3 \cdot \rho_1 - r_2^3 \rho_1\right] = -f\frac{4\pi}{3r^2}\left[r_2^3 (\rho_2 - \rho_1) + r^3 \rho_1\right]$$

$$= m \cdot r^{-2} + n \cdot r;$$

dabei ist

$$m = -f\pi\frac{4}{3} r_2^3 (\rho_2 - \rho_1), \quad n = -f\pi\frac{4}{3} \cdot \rho_1.$$

Der Druck im Mantel folgt wieder aus den Gesetzen der Hydrostatik:

$$p_{\text{Mantel}} = \rho_1 \cdot \int R\, dr + c = \rho_1\left[-m \cdot r^{-1} + \frac{n}{2} r^2\right] + c;$$

c ist Integrationskonstante. —

Ganz analog wie im Mantel würde sich die Massenkraft in der Schale bestimmen. Beträgt aber die Dicke der Schale etwa nicht mehr als 100 km, so ändert sich der Schwerewert in ihr, wie man

leicht zeigen kann, um noch nicht ein Halb vom Hundert; er kann also ohne merklichen Fehler als konstant, gleich dem Oberflächenwert g angenommen werden. Es wird demnach, wenn wir zunächst die Dichte und $\lambda + 2\,\mu$ als in der Schale unveränderlich ansehen (Fall II, a)

$$R_1 = -\frac{\rho_1}{\lambda + 2\,\mu} \cdot R = \frac{g \cdot \rho_1}{\lambda + 2\,\mu}$$

und daraus berechnet sich die Verschiebung

$$U = \frac{1}{r^2}\left[K + \int\left(\frac{\rho_1 \cdot g \cdot r}{\lambda + 2\,\mu} + a\right) r^2\,dr\right] = \frac{1}{r^2}\left[K + \frac{\rho_1 \cdot g}{4(\lambda + 2\mu)} r^4 + \frac{a}{3} r^3\right].$$

Die Tabelle auf Seite 34 zeigt, dass entweder die Dichte oder die elastischen Eigenschaften oder beide gleichzeitig in der Schale variieren. Die elastische Grundgleichung

$$(\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r}\,U\right) = -\,\rho\,R$$

lässt sich schreiben

$$\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho}\,\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r}\,U\right) + R = 0.$$

$\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho}$, das Quadrat der Geschwindigkeit der Dilatationswelle, ist für die Schale in guter Annäherung in der Form $\alpha\,r + \beta$ darstellbar. (Vergl. pag. 25.) Beachten wir dies, so wird

$$R_1 = -\frac{\rho}{\lambda + 2\,\mu} \cdot R = \frac{g}{\alpha\,r + \beta}$$

und die Integration liefert für den Fall II, b die Verschiebung

$$U = \frac{K}{r^2} + \frac{a}{3} r + \frac{g}{3\alpha}\,r \cdot \lg(\alpha r + \beta) - \frac{g}{9\alpha} r + \frac{g\beta}{6\alpha^2} - \frac{\beta^2 g}{3\alpha^2}\frac{1}{r} + \frac{g\beta^3}{3\alpha^4}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\lg(\alpha r + \beta)$$

oder

$$U = \frac{K}{r^2} + \frac{g(\alpha^3 r^3 + \beta^3)}{3\,\alpha^4\,r^2} \cdot \lg(\alpha r + \beta) + \frac{3\,a\alpha - g}{9\alpha} r + \frac{g\beta}{6\alpha^2} - \frac{g\beta^2}{3\alpha^3} \cdot \frac{1}{r}.$$

Aus der Verschiebung resultieren die Spannungen

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\delta U}{\delta r} + 2\,\lambda\,\frac{U}{r}\,;\quad \widehat{\vartheta\vartheta} = \widehat{\varphi\varphi} = \lambda\,\frac{\delta U}{\delta r} + 2\,(\lambda + \mu)\,\frac{U}{r}.$$

Die Verschiebung in der Schale, die Spannungen in ihr und

die Drucke in Mantel und Kern müssen folgende Grenzbedingungen erfüllen:

1. Die Verschiebung an der Aussenfläche der Magmaschicht ($r = r_1$) ist Null (Mantel und Kern wurden als inkompressibel angenommen!).
2. Die Radialspannung in der Schale verschwindet an der Erdoberfläche.
3. An der Trennungsfläche Kern-Mantel sind die Drucke beiderseits gleich.
4. An der Trennungsfläche Mantel-Schale sind die Radialspannungen beiderseits gleich.

Aus den diesen Grenzbedingungen entsprechenden Gleichungen bestimmen sich die Konstanten K, a, b, c. —

In Angleichung an die bei der Erde gegebenen Verhältnisse ist zu setzen $r_2 = 4870$ km, $r_1 = 6270$ km, $r_0 = 6370$ km. Es wird also hierbei eine Dreiteilung der Erde angenommen derart, dass zwischen Kern und einer äusseren 100 km dicken Schale, in der nach den Ergebnissen der Schwerebeobachtungen elastisches Gleichgewicht vorauszusetzen ist, ein 1400 km dicker Magmamantel liegt. Die Dichte des Kerns werde zu 8,2, die Dichte des Mantels zu 3,3 angesetzt. Mit der Gravitationskonstanten $f = 6{,}658 \cdot 10^{-8}$ resultiert der Schwerewert $g_2 = 1113.7$ an der Kernoberfläche. m und n ergeben sich zu $-\ 1{,}578 \cdot 10^{20}$ bezw. $-\ 9{,}2032 \cdot 10^{-7}$ in absoluten Einheiten. Der Schwerewert in der Schale wird zu 981 c. g. s. angenommen. Das Quadrat der Geschwindigkeit der Dilatationswelle ist der Tabelle pag. 34 zu entnehmen: Es ist für die ersten 100 km

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \alpha r + \beta$$

mit den Werten $-\ 6{,}351 \cdot 10^3$ und $4{,}5597 \cdot 10^{12}$ (C. G. S.) für α und β. Mit diesen Daten erhält man gemäss den Grenzgleichungen folgende Werte für die Integrationskonstanten K, a, b, c:

$$K = -\ 5{,}4265 \cdot 10^{26},\ a = 4{,}1649,\ b = 2733900 \cdot 10^6,$$
$$c = -\ 199180 \cdot 10^6. —$$

Der Druck im Kern wird durch

$$p_K = 2733900 \cdot 10^6 - r^2 \cdot \text{num log}\,(0{,}97202 - 6),$$

der Druck im Mantel durch

$$p_M = \frac{1}{r} \cdot \text{num log}\,(20{,}71673) - r^2 \cdot \text{num log}\,(0{,}18142 - 6) - 199180 \cdot 10^6$$

dargestellt. — Die für die verschiedenen Tiefen berechneten Spannungen finden sich in nachstehender Tabelle.

Tiefe in km.	$\widehat{rr}$ in 10^6 c. g. s.	$\widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c g. s.	D in 10^6 c. g. s.
0	0	320	+ 320
20	6687	2920	— 3767
40	13470	5156	— 8314
60	20540	8017	— 12520
80	27620	10610	— 17010
100	34570	13230	— 21340

Tiefe in km.	p in 10^6 c. g. s.	Tiefe in km.	p in 10^6 c. g. s.	Tiefe in km.	p in 10^6 c. g. s.
100	34570	1500	510200	5370	2640000
300	99420	1870	835300	5870	2710000
500	164900	2370	1234000	6370	2734000
700	231300	2870	1585000		
900	279500	3370	1890000		
1100	367500	3870	2148000		
1300	437800	4370	2359000		
1500	510200	4870	2523000		

Der vorliegende Fall ergibt folgendes:

Im Mantel und Kern herrscht hydrostatisches Gleichgewicht; die Spannungsdifferenz ist hier überall Null. — In der Schale nimmt die Spannungsdifferenz von einem nicht sehr beträchtlichen Oberflächenwert an ab; sie wird in einiger Tiefe Null. Die Niveaufläche mit der Spannungsdifferenz Null liegt umso tiefer, je dicker die kompressible feste Schale ist. — Die Radialspannung wächst in der Schale fast linear. Im Mantel ist die ihr entsprechende Kurve schwach konvex gegen die Abscissen- (Tiefen-) Axe. Im Kern wird der Druck durch eine anfänglich steil ansteigende Parabel dargestellt, deren Scheitel im Erdmittelpunkt liegt. — Der transversale Druck wächst von der Oberfläche an ständig aber langsamer als die radiale Spannung, so dass die beiden Spannungskurven für einen bestimmten Punkt der Schale sich durchkreuzen; in ihm ist die Spannungsdifferenz Null. — Dieser „Kreuzungspunkt“ oder vielmehr

die Niveaufläche der Spannungsdifferenz Null liegt bei den gegebenen Daten etwa 1600 m unter der (theoretischen) Erdoberfläche. An der Trennungsfläche zwischen Mantel und Schale nimmt $\widehat{\varphi\varphi}$ plötzlich stark zu, um weiterhin der Radialspannung gleich zu sein. In Wirklichkeit wäre natürlich dieser sprunghafte Uebergang zur Gleichheit der Spannungen durch einen allmählichen ersetzt zu denken.

Die vorstehend behandelten Fälle I und II tragen zwar insofern der neueren Forschung Rechnung als die Wiechertsche Zweiteilung und die Abspaltung einer elastischen äusseren Schale in einen Fall eingetragen und weiterhin für die elastischen Eigenschaften der durchweg kompressibeln Erde bezw. der kompressibeln Schale ein aus seismischen Beobachtungen resultierender Zahlenwert eingesetzt wurde. Im übrigen entsprechen sie durch die Annahme der Homogenität bezw. der Inkompressibilität noch durchaus den älteren Anschauungen über die Konstitution des Erdinnern. —

Eine kurze Rekapitulation der in § 5 erhaltenen Resultate wird uns der Lösung unserer eigentlichen Aufgabe, der möglichst angenäherten Bestimmung des im Erdinnern herrschenden Spannungssystems, näher bringen:

Die Erde besteht, wie wir sahen, aus merklich isotropem Material. Die Dichteverteilung ist im grossen und ganzen so anzunehmen, dass einen Kern von 4870 km Halbmesser mit der mittleren Dichte 8,2 ein 1500 km dicker Mantel von der Dichte 3,3 umgibt. Die Dichteänderungen in Kern und Mantel sind relativ unbedeutend, so dass für unsere Zwecke von einer Variation der Dichten abgesehen werden kann. Der Kompressionsmodul steigt im Mantel von einem schon beträchtlichen Oberflächenwert noch sehr erheblich an. Die Kompressibilität des Kerns ist sehr gering und bei konstanter Kerndichte ebenfalls konstant. Ueber die numerischen Werte der elastischen Konstanten gibt die Tabelle auf Seite 34 Auskunft. Die in ihr enthaltenen Werte sind aus den Geschwindigkeiten der Erdbebenwellen abgeleitet; sie geben also nur an wie sich die Erde sehr raschen Schwingungen gegenüber elastisch verhält. Die bei unserm Problem wirkenden Kräfte haben Perioden von der Dauer geologischer Epochen. Die elastischen Konstanten ändern sich mit der Dauer der Kraftwirkung. Art und Betrag der Aenderung kennen wir zunächst nicht. Die Ergebnisse der Schwerebeobachtungen fordern aber für die Partien der Erde innerhalb einer oberflächlichen

Schicht von ca. 100 km (120 km) Stärke das Bestehen hydrostatischen Gleichgewichts. Aus den Ausdrücken für die Spannungen

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\delta U}{\delta r} + 2\lambda\frac{U}{r}; \quad \widehat{\varphi\varphi} = \widehat{\vartheta\vartheta} = \lambda\frac{\delta U}{\delta r} + 2(\lambda + \mu)\frac{U}{r}$$

geht aber sofort hervor, dass nur für ein gegen λ verschwindendes μ d. h. bei sehr geringer Riegheit der Erde die Drucke radial und transversal annähernd gleich und damit den hydrostatischen Grundgleichungen entsprechende Verhältnisse geschaffen werden. Die Variation der andern elastischen Konstanten mit der Dauer der Kraftwirkung ist nicht ohne weiteres angebbar; jedoch kann aller Wahrscheinlichkeit nach angenommen werden, dass die Kompressibilitäten bezw. die Kompressionsmoduln erhalten bleiben. —

Führt man mittels der Relation $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ statt der Konstanten λ den Kompressionsmodul k neben μ in die Grundgleichung und die Formeln für die Spannungen ein, so ergibt sich, dass μ gegen k verschwinden muss, wenn hydrostatische Druckverteilung möglich sein soll.

Dem vorstehenden entsprechend nehmen wir nun an:

Fall III. 1.

Die Erde bestehe aus einem kompressibeln (Kompressionsmodul nach Wiechert) hydrostatisch geschichteten Kern mit der Dichte ρ_2 und dem Radius r_2; nach aussen folge eine Magmaschicht konstanter Dichte (ρ_1) mit dem äusseren Radius r_1 und den mit dem Radius variierenden Wiechertschen Kompressibilitäten und endlich eine feste kompressible Schale von derselben Dichte, dem Grenzradius r_0, den aus den Quadraten der Wellengeschwindigkeiten bestimmten Konstanten λ und μ und mit konstanter Massenkraft.

Führt man in die bei radialer Massenkraft geltende Gleichgewichtsgleichung, in deren Integral und die Ausdrücke für die radiale und transversale Spannung statt λ und μ die elastischen Konstanten k und μ ein, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(k + \frac{4}{3}\mu)\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r}U\right) + \rho \cdot R = 0;$$

$$U = \frac{1}{r^2}\left[K + \int (R_1\,dr + a)\,r^2\,dr\right],$$

worin R_1 den Ausdruck

$$-\frac{\rho \cdot R}{k + \frac{4}{3}\mu}$$

bedeutet, und

$$\widehat{rr} = (k + \frac{4}{3}\mu)\frac{\delta U}{\delta r} + (2k - \frac{4}{3}\mu)\frac{U}{r}\,;\ \widehat{\varphi\varphi} = (k - \frac{2}{3}\mu)\frac{\delta U}{\delta r} + 2(k + \frac{\mu}{3})\frac{U}{r}.$$

Kann μ gegen k vernachlässigt werden, so erhält man als Gleichgewichtsgleichung

$$k\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta U}{\delta r} + \frac{2}{r}U\right) + \rho \cdot R = 0$$

deren Integral

$$U = \frac{1}{r^2}\left[K + \int (R_1\, dr + a)\, r^2\, dr\right]$$

mit

$$R_1 = -\frac{k}{\rho} \cdot R$$

und die radial und transversal gleichen Spannungen (hydrostatisches Gleichgewicht)

$$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi} = \widehat{\vartheta\vartheta} = k\frac{dU}{\delta r} + 2k\frac{U}{r}.$$

Die Massenkraft bestimmt sich genau wie beim vorhergehenden Fall zu $-g_2 \cdot r/r_2$ im Kern, $m \cdot r^{-2} + n \cdot r$ im Mantel, wobei wieder m und n die Ausdrücke

$$-f\frac{4}{3}\pi r_2^3(\rho_2 - \rho_1) \text{ bezw. } -f\frac{4}{3}\pi\rho_1$$

bedeuten, und $R = -g$ für die äussere Schale. — Dementsprechend berechnet sich R_1 für den Kern zu $\frac{\rho_2 \cdot g_2 \cdot r}{k_2 \cdot r_2}$ und für die Schale als $\frac{\rho \cdot g}{\lambda + 2\mu} = \frac{g}{\alpha r + \beta}$, wenn $\alpha r + \beta$ das Quadrat der Geschwindigkeit der Dilatationswellen in der Schale bezeichnet.

Für den Kern ergibt sich

$$\int R_1\, dr = \frac{\rho_2 g_2 r^2}{2 k_2 r_2},$$

und damit findet man die Verschiebung im Kern:

$$U = \frac{K_2}{r_2} + \frac{\rho^2 \cdot g_2}{10 k_2 r_2} r^3 + \frac{a_2}{3} r.$$

Die Transversalspannung bezw. Radialspannung im Kern ist

$$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi} = \widehat{\vartheta\vartheta} = k_2 \left[\frac{\rho_2 \cdot g^2}{2\, k_2 r_2}\, r^2 + a_2 \right].$$

Für die Schale gilt das auf Seite 42 berechnete Integral

$$U = \frac{K_0}{r^2} + \frac{g(\alpha^3 r^3 + \beta^3)}{3\,\alpha^4 r^2} \cdot \lg(\alpha r + \beta) + \frac{3 a_0 \alpha - g}{9\,\alpha}\, r + \frac{g\beta}{6\alpha^2} - \frac{g\beta^2}{3\alpha^3} \cdot \frac{1}{r}$$

und die entsprechenden Spannungen

$$\widehat{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\delta U}{\delta r} + 2(\lambda + \mu) \frac{U}{r}; \qquad \widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\delta U}{\delta r} + 2\lambda \frac{U}{r}.$$

Für den Mantel hat R_1 den Wert

$$-\frac{\rho_1}{k_1} \cdot R = \frac{\rho_1 (|m| \cdot r^{-2} + |n| \cdot r)}{\gamma r + \delta},$$

wenn der früher gefundene Betrag der Massenkraft eingeführt und $k_1 = \gamma r + \delta$ gesetzt wird. Das Integral $\int R_1\, dr$ wird

$$\int R_1\, dr = -\frac{\rho_1 |m|}{\delta} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\rho_1 |m| \gamma}{\delta^2} \cdot \lg r + \frac{\rho_1 |n|}{\gamma} \cdot r + \frac{\rho_1 (|m| \gamma^3 - |n| \delta^3)}{\delta^2 \gamma^2} \lg(\gamma r + \delta).$$

Damit resultiert für U der Ausdruck

$$U = \frac{K_1}{r^2} + \frac{a_1}{3} r - \frac{\rho_1 |m|}{2\delta} + \frac{\rho_1 |n|}{4\gamma} r^2 - \frac{\rho_1 \cdot |m| \cdot \gamma}{3\delta^2} \cdot r \cdot \left(\lg r - \frac{1}{3}\right)$$

$$+ \frac{\rho_1 (|m| \cdot \gamma^3 - |n| \delta^3)}{\gamma^2 \delta^2} \cdot \left[\frac{r^3 \gamma^3 + \delta^3}{3 \gamma^3 r^2} \cdot \lg(\gamma r + \delta) - \frac{1}{9} r + \frac{\delta}{6\gamma} - \frac{\delta^2}{3\gamma^2} \frac{1}{r} \right]$$

und mit den Werten für $\frac{\delta U}{\delta r}$ und $\frac{U}{r}$ die Spannung

$$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi} = \widehat{\vartheta\vartheta} = k_1 \left[a_1 + \frac{\rho_1 |n|}{\gamma} r - \frac{\rho_1 \cdot |m|}{\delta} \frac{1}{r} - \frac{\rho_1 \cdot |m| \cdot \gamma}{\delta^3} \cdot \lg r \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_1 (|m| \gamma^3 - |n| \delta^3)}{\gamma^2 \delta^2} \cdot \left(\frac{r \cdot \gamma}{3(\gamma r + \delta)} + \lg(\gamma r + \delta) - \frac{1}{3} - \frac{\delta^2}{3\gamma^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\delta^3}{3\gamma^3} \cdot \frac{\gamma}{r^2 (\gamma r + \delta)} + \frac{\delta}{3\gamma} \cdot \frac{1}{r} \right) \right].$$

Die Grenzbedingungen lauten:

Die Verschiebung im Erdmittelpunkt ist Null. —

Die Radialspannung verschwindet an der Erdoberfläche. —

An der Trennungsfläche Kern-Mantel sind die Verschiebungen und Spannungen beiderseits gleich. —

An der Trennungsfläche Mantel-Schale sind Verschiebungen und Radialspannungen beiderseits gleich. —

Aus den den Grenzbedingungen entsprechenden Gleichungen bestimmen sich die Konstanten K_2, a_2; K_1, a_1; K_0, a_0. —

Die Auswertung der sechs Konstanten und der Spannungen in verschiedenen Tiefen ist hier des komplizierten Baues der Formeln wegen ungemein mühsam und zeitraubend. Ich habe deshalb den Fall III, 1 für die Rechnung dadurch vereinfacht, dass ich statt des variabeln Kompressionsmodul im Mantel einen konstanten mittleren Kompressionsmodul einführte. —

Wir bestimmen also im folgenden

Fall III, 2

das Spannungssystem in einer Kugel, deren hydrostatisch geschichteten Kern vom Radius r_2, der Dichte ρ_2 und dem Kompressionsmodul k_2 ein Magmamantel (hydrostatische Druckverteilung) mit dem äusseren Radius r_1, der Dichte ρ_1 und dem mittleren Kompressionsmodul k_1 umgibt. Für die nach aussen folgende Schale von der Dichte ρ_0 und mit dem Grenzradius r_0 gilt $\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} = \alpha\, r + \beta$.

Für die Massenkräfte ergeben sich die unter III, 1 gefundenen Werte:

$R_{Kern} = -\, g_2 \,.\, r/r_2$; $R_{Mant.} = m \,.\, r^{-2} + n \,.\, r$; $R_{Schale} = -\, g$. —

Ganz wie beim vorhergehenden Fall berechnen sich auch für Kern und Schale Verschiebung und Spannungen. Im Kern ist

$$U = \frac{K_2}{r^2} + \frac{g_2 \,.\, \rho_2}{10\, k_2\, r_2}\, r^3 + \frac{a_2}{3}\, r;$$

$$\widehat{r\,r} = \widehat{\varphi\,\varphi} = \widehat{\vartheta\,\vartheta} = k_2 \left[\frac{g_2\, \rho_2}{2\, k_2\, r_2}\, r^2 + a_2 \right]$$

in der Schale:

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu)\left[-\frac{2K_0}{r^3} + \frac{a_0}{3} + \frac{g}{3\alpha}\cdot\lg(\alpha r+\beta) + \frac{g}{3(\alpha r+\beta)}r - \frac{g}{9\alpha} + \frac{\beta^2 g}{3\alpha^3}\frac{1}{r^2}\right.$$

$$\left. + \frac{g\beta^3}{3\alpha^4}\frac{1}{r^2}\frac{\alpha}{\alpha r+\beta} - 2\frac{g\beta^3}{3\alpha^4}\frac{1}{r^3}\cdot\lg(\alpha r+\beta)\right] + 2\lambda\left[\frac{K_0}{r^3} + \frac{a_0}{3} + \frac{g}{3\alpha}\lg(\alpha r+\beta)\right.$$

$$\left. - \frac{g}{9\alpha} + \frac{g\beta}{6\alpha^2}\frac{1}{r} - \frac{\beta^2 g}{3\alpha^3}\frac{1}{r^2} + \frac{g\beta^3}{3\alpha^4}\frac{1}{r^3}\lg(\alpha r+\beta)\right].$$

$$\widehat{\varphi\varphi} = \ldots\ldots$$

(Der Ausdruck lässt sich noch etwas zusammenziehen; für seine numerische Auswertung ergibt sich jedoch damit kein Vorteil).

Für den Mantel ist

$$R_1 = -\frac{\rho_1}{k_1}\cdot R = \frac{\rho_1}{k_1}\left(|m|\cdot r^{-2} + |n|\cdot r\right).$$

Also wird

$$\int R_1\, dr = -\frac{\rho_1\cdot|m|}{k_1\cdot r} + \frac{\rho_1\cdot|n|\cdot r^2}{2k_1}$$

und folglich

$$U = \frac{K_1}{r^2} - \frac{\rho_1|m|}{2k_1} + \frac{\rho_1|n|}{10k_1}r^3 + \frac{a_1}{3}r;$$

$$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi} = k_1\left[\frac{\rho_1|n|}{2k_1}r^2 - \frac{\rho_1|m|}{k_1}\frac{1}{r} + a_1\right].$$

Grenzbedingungen:

Die Verschiebung im Erdmittelpunkt ist Null. —
Die Radialspannung verschwindet an der Erdoberfläche. —
An der Trennungsfläche Kern-Mantel sind die Verschiebungen und Spannungen beiderseits gleich. —
An der Trennungsfläche Mantel-Schale sind Verschiebung und Radialspannung beiderseits gleich. —

In Angleichung an die bei der Erde gegebenen Verhältnisse ist zu setzen: $r_2 = 4870 \cdot 10^5$; $r_1 = 6270 \cdot 10^5$; $r_0 = 6370 \cdot 10^5$; $\rho_2 = 8{,}2$; $\rho_1 = 3{,}3$; $\rho_0 = 3{,}3$; $k_2 = 8{,}2328 \cdot 10^{12}$; $k_1 = 2{,}1888 \cdot 10^{12}$; $\alpha = -6{,}351 \cdot 10^{-3}$; $\beta = 4{,}5597 \cdot 10^{12}$ in absoluten Einheiten. —

Mit dem Wert $6{,}658 \cdot 10^{-8}$ für die Gravitationskonstante ergibt sich an der Kernoberfläche der Schwerewert $g_2 = 1113{,}7$ c. g. s.

Die Schwerkraft im Mantel berechnet sich aus $m \cdot r^{-2} + n \cdot r$ mit $m = -1{,}5784 \cdot 10^{20}$ c. g. s. und $n = -9{,}2032 \cdot 10^{-7}$ c. g. s. Die Massenkraft in der Schale wird zu $g = 981$ c. g. s. angenommen. Gemäss den Grenzbedingungen erhält man mit den gegebenen Daten die Integrationskonstanten:

$$a_0 = 4{,}1089;\ K_0 = -5{,}4946 \cdot 10^{26};\ a_1 = 0{,}09242;$$
$$K_1 = 14{,}3285 \cdot 10^{24};\ a_2 = -0{,}3317;\ K_2 = 0{,}0.$$

Damit sind alle zur Berechnung der Spannungen nötigen Konstanten gegeben. Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Rechnung. — Die Drucke in Kern und Mantel werden durch die Formeln

$$\widehat{rr}_K = \text{num log}\,(0{,}97202 - 6) \cdot r^2 - 2730900 \cdot 10^6$$

$$rr_M = \text{num log}\,(0{,}18142 - 6) \cdot r^2 - \text{num log}\,(20{,}71673) \cdot 1/r + 202290 \cdot 10^6$$

dargestellt. —

Tiefe in km.	$\widehat{rr}$ in 10^6 c. g. s.	$\widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.	Tiefe in km.	$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.
			100	31480
0	0	83800	200	63800
			300	96310
20	6290	88700	400	129000
			500	161800
40	12580	93500	600	194900
			700	228200
60	18840	98500	800	261700
			900	295600
80	25320	103400	1000	329800
			1100	364300
100	31480	108300	1200	399300
			1300	434800
			1400	470600
			1500	507200

Tiefe in km.	$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.	Tiefe in km.	$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.
1700	686100	4120	2256000
1870	832300	4370	2356000
2120	1037000	4620	2444000
2370	1231000	4870	2520000
2620	1412000	5120	2584000
2870	1582000	5370	2637000
3120	1741000	5620	2678000
3370	1887000	5870	2707000
3620	2022000	6120	2725000
3870	2145000	6370	2731000

Fall III, 3.

Zum Vergleich wurden aus den zuerst benutzten λ und μ enthaltenden Formeln unter den Bedingungen des Falls III, 2 die Spannungen berechnet, wenn μ gegen λ vernachlässigt wird.

Die Ausdrücke für die Verschiebungen und die Spannungen sind den für den vorigen Fall abgeleiteten völlig analog, nur steht für k überall das kleinere λ.

Man erhält also so die Spannungen in einer Erde von grösserer Kompressibilität.

Aus den Gleichungen

$$U = \frac{K_2}{r^2} + \frac{g_2 \rho_2}{10 \lambda_2 r_2} r^3 + \frac{a_2}{3} r;$$

$$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi} = \lambda_2 \left[\frac{g_2 \rho_2}{2 \lambda_2 r_2} r^2 + a_2 \right]$$

für den Kern,

$$U = \frac{K_1}{r^2} - \frac{\rho_1 |m|}{2 \lambda_1} + \frac{\rho_1 |n|}{10 \lambda_1} r^3 + \frac{a_1}{3} r;$$

$$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi} = \lambda_1 \left[\frac{\rho_1 |n|}{2 \lambda_1} r^2 - \frac{\rho_1 |m|}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{r} + a_1 \right]$$

für den Mantel und aus den auf Seite 42 und 50 gegebenen Ausdrücken für Verschiebungen und Spannungen in der Schale ergibt

sich mit Hilfe der Grenzbedingungen von Fall III, 2 und den dort gegebenen Zahlenwerten der Konstanten mit $\lambda_2 = 5{,}6527 \cdot 10^{12}$ c. g. s.; $\lambda_1 = 1{,}4719 \cdot 10^{12}$ c. g. s.:

$$a_0 = 4{,}0828;\ a_1 = 0{,}1384;\ K_0 = -5{,}5261 \cdot 10^{26};$$
$$K_1 = 21{,}4837 \cdot 10^{24};\ a_2 = -0{,}4828;\ K_2 = 0{,}0$$

in absoluten Einheiten. Die Spannungen in Kern und Mantel werden durch

$$\widehat{rr}_K = \text{num log}\,(0{,}97202 - 6) \cdot r^2 - 2729400 \cdot 10^6:$$

$\widehat{rr}_M = \text{num log}\,(0{,}18142 - 6) \cdot r^2 - \text{num log}\,(20{,}71673) \cdot 1/r + 203680 \cdot 10^6$ dargestellt. —

Die nachstehende Tabelle gibt die Spannungen in 10^6 c. g. s. Einheiten.

Tiefe in km.	$\widehat{rr}$ in 10^6 c. g. s.	$\widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.	Tiefe in km.	$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.
0	0	122600	100	30100
20	5987	128500	300	94900
40	11970	134200	500	160400
60	18240	140700	700	226800
80	24220	146500	900	294200
100	30100	152500	1100	363000
			1300	433400
			1500	505800

Tiefe in km.	$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.	Tiefe in km.	$\widehat{rr} = \widehat{\varphi\varphi}$ in 10^6 c. g. s.
1700	684600	4120	2255000
1870	830800	4370	2354000
2120	1036000	4620	2442000
2370	1229000	4870	2518000
2620	1411000	5120	2583000
2870	1581000	5370	2636000
3120	1739000	5620	2677000
3370	1886000	5870	2706000
3620	2020000	6120	2724000
3870	2143000	6370	2729000

Wie die für die Fälle III, 2 und III, 3 in den Tabellen gegebenen Zahlenwerte und die Kurven (vergl. Tafel I und II) zeigen, wächst die Radialspannung zuerst nahezu linear und im Mantel in einer nach unten schwach konvexen Kurve bis zum Wert von 507200 Atm. (III, 2) bezw. 505800 Atm. (III, 3) an der Grenzfläche zwischen Mantel und Kern. Längs einer anfänglich steil ansteigenden Parabel wird dann bei etwa 2080 km Tiefe die erste Million, bei 3580 km die zweite Million Atmosphären überschritten. Der maximale Druck ist bei III, 3 etwas geringer als im andern Fall. — Die transversale Spannung erreicht an der Oberfläche den recht beträchtlichen Wert von 83800 bezw. 122600 Atm.; sie steigt langsam und nahezu linear an bis 108500 Atm., bezw. 152800 Atm. an der Grenzfläche von Mantel und Schale. — Die Spannungsdifferenz nimmt von einem dem Oberflächenwert der transversalen Spannung gleichen Betrag angefangen allmählich ab. Ein „Kreuzungspunkt" wie im Fall II wird hier nicht erreicht. An der Trennungsfläche der Schale vom Mantel werden die Spannungen radial und transversal einander gleich; die Spannungsdifferenz verschwindet plötzlich. Selbstverständlich ist in Wirklichkeit eine derartige Unstetigkeit nicht vorhanden; sie rührt lediglich von der theoretisch eingeführten Grenzfläche her. Von endlichen Spannungsdifferenzen findet der Uebergang zur Spannungsdifferenz Null bezw. zur Gleichheit der radialen und transversalen Spannung stetig statt. — Für das ganze Erdinnere in über 100 km Tiefe ist die Spannungsdifferenz Null. — Fall III, 2 (kleinere Kompressibilität) liefert grössere Radialspannungen als Fall III, 3 (grössere Kompressibilität); umgekehrt wächst die Transversalspannung mit zunehmender Kompressibilität (vergl. Tafel I!). — Je dicker die Schale grösserer Kompressibilität ist, desto grösser ist die Spannungsdifferenz an der Oberfläche. Desgleichen nimmt die transversale Spannung mit zunehmender Dichte und wachsendem Schwerewert zu.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch den den Wiechertschen Resultaten bezüglich der Massenverteilung in der Erde

---

Anmerkung. Die numerischen Rechnungen dieses Paragraphen sind mit fünfstelligen Tafeln durchgeführt. Vermöge der Eigenart der Formeln — es treten Summanden verschiedener Grössenordnung auf — sind jeweils nur die drei oder vier ersten wertigen Ziffern jeder berechneten Zahl zuverlässig. Aus demselben Grund ergaben sich bei den Spannungen beiderseits der Grenzflächen bisweilen kleine Differenzen; es wurde dann ein Mittelwert in die Tabellen eingetragen.

und der Fortpflanzung der Erdbebenwellen völlig entsprechenden Fall. Wir sehen also von der hydrostatischen Schichtung ab und benützen ohne weiteres die aus den seismischen Beobachtungen berechneten elastischen Konstanten.

Fall IV.

Die Erde bestehe aus einem elastischen festen Kern von der Dichte ρ_1, dem Radius r_1 und den Wiechertschen elastischen Konstanten λ_1 und μ_1. Umhüllt wird der Kern von einem festen kompressibeln Mantel mit der Dichte ρ_0, dem Grenzradius r_0 und den aus den Erdbebenbeobachtungen errechneten variabeln Elastizitätskonstanten λ_0 und μ_0.

Die Schwerkraft im Kern ist $R = -g \cdot r/r_1$. Die Schwerkraft im Mantel berechnet sich wieder zu $m \cdot r^{-2} + n \cdot r$.

Für den Kern ist

$$R_1 = -\frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot R = \frac{\rho_1 \cdot g_1 \cdot r}{(\lambda_1 + 2\mu_1) r_1} .$$

Demnach erhält man die Verschiebung

$$U = \frac{1}{r^2}\left[K_1 + \frac{\rho_1 \cdot g_1}{10(\lambda_1 + 2\mu_1) r_1} r^5 + \frac{a_1}{3} r^3\right].$$

Mit dem Wert

$$R_1 = -\frac{\rho_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \cdot R = \frac{\rho_0(|m| \cdot r^{-2} + |n| r)}{\alpha r + \beta}$$

ergibt sich für den Mantel

$$U = \frac{K_0}{r^2} + \frac{a_0}{3} r - \frac{\rho_0 |m|}{2\beta} + \frac{\rho_0 \cdot |n|}{4\alpha} r^2 - \frac{\rho_0 |m| \alpha}{3\beta^2} r\left(\lg r - \frac{1}{3}\right)$$

$$+ \frac{\rho_0(|m| \cdot \alpha^3 - |n| \beta^3)}{\alpha^2 \beta^2}\left[\frac{r^3 \alpha^3 + \beta^3}{3\alpha^3 r^3} \cdot \lg(\alpha r + \beta) - \frac{1}{9} r + \frac{\beta}{6\alpha} - \frac{\beta^2}{3\alpha^2} \frac{1}{r}\right].$$

Grenzbedingungen:

Die Verschiebung im Erdmittelpunkt ist Null.

Die Radialspannung verschwindet an der Erdoberfläche.

An der Trennungsfläche Kern-Mantel sind die Verschiebungen und die Radialspannungen beiderseits gleich.

Aus den diesen Grenzbedingungen entsprechenden vier Gleichungen bestimmen sich die Konstanten K_1, a_1; K_0, a_0. Führt man zur Vereinfachung der Rechnung für die Schwerkraft im Mantel einen Mittelwert ein, so erhält man in runden Zahlen als Spannungen in Atmosphären:

Tiefe in km.	$\widehat{rr}$ in Atmosphären	$\widehat{\varphi\varphi}$ in Atmosphären
0	0	200000
30	9000	—
1500	800000	1300000
6370	2300000	2300000

Die Spannungsdifferenz ist hier überall, ausgenommen im Erdmittelpunkt, von Null verschieden. An der Oberfläche erreicht sie den sehr erheblichen Betrag von ca. 200000 Atm.

Die Resultate der oben besprochenen Arbeit von Geiger und Gutenberg (vergl. S. 36) ändern die Ergebnisse dieses Paragraphen nicht wesentlich. Die Unstetigkeit in den Spannungskurven bei 1500 km erscheint ausgeglichen. Die Transversalspannungen fallen vielleicht etwas geringer, die Radialspannungen etwas grösser aus.—

Aus Tafel I geht hervor, dass bei den in den Fällen II, III,2 und III,3 recht verschiedenen Kompressibilitäten die Radialspannungen in der äusseren Schale sehr wenig variieren. Auch im weiteren Verlauf fallen die Kurven mit der in Tafel II wiedergegebenen bei dem gewählten Masstab nahezu zusammen. Sollten die in unserer Untersuchung benutzten Werte der Wellengeschwindigkeiten später erheblich berichtigt werden müssen, so würden die Angaben für die Spannungen in grösseren Tiefen kaum eine Aenderung erfahren, solange an der Wiechertschen Massenverteilung und an der hydrostatischen Schichtung des Erdinnern festgehalten wird. In der äusseren Schale freilich wachsen transversale Spannung und Spannungsdifferenz mit zunehmender Kompressibilität stark an. — Immerhin dürfte aber irgend einer der sechs behandelten Fälle auch sehr geänderten Bedingungen angenähert entsprechen.

§ 7. Zusammenfassung, Resultate und Folgerungen.

In den ersten Abschnitten unserer Arbeit besprachen wir verschiedene Methoden zur Bestimmung der elastischen Eigenschaften der Erde. —

Wird eine flüssige Kugel um einen ihrer Durchmesser in Rotation versetzt, so behält sie die Kugelgestalt nicht bei, sie plattet sich ab und geht in ein Rotationsellipsoid bezw. eine der andern möglichen Gleichgewichtsformen über. Eine feste Kugel wird unter sonst gleichen Verhältnissen bei derselben Umdrehungsgeschwindigkeit jedenfalls eine geringere Abplattung als eine flüssige aufweisen. Die Abplattung fällt umso grösser aus, je weniger starr das Kugelmaterial ist. Und umgekehrt kann aus der beobachteten Abplattung auf eine bestimmte Steifigkeit geschlossen werden. — Für die Erde ergibt sich so eine Riegheit, die mit der des Glases in erster Annäherung vergleichbar ist.

Sonne und Mond erzeugen in den Meeren eine Flutwelle von — bei vollkommen starrer Erde — ganz bestimmter Höhe. Ist die feste Erdmasse nicht absolut starr, so wird auch sie die Flutbewegung, wenn auch nur in geringem Masse, mitmachen, und die Fluthöhe wird dementsprechend geringer ausfallen. Berechnet man aus dem Verhältnis der beobachteten Fluthöhe zur Fluthöhe für eine vollkommen starre Erde die Starrheit des Erdkörpers, so erhält man für die Konstanten μ einen Wert von ca. $6 \cdot 10^{11}$ c. g. s. —

Die Umlaufszeit der Erdpole in der Polbahn ist erheblich länger als die für eine starre Erde berechnete Eulersche Periode der Polschwankungen. Der Verlängerung der Periode entspricht eine bestimmte Nachgiebigkeit der Erde. Nach den Arbeiten von Hough, Rudzki, Herglotz und Brill ergeben sich aus dem Phänomen der Polschwankungen für den Elastizitätskoeffizienten der äusseren Schichten bezw. des Wiechertschen Kerns um $8 \cdot 10^{11}$ c. g. s. bezw. $14 \cdot 10^{11}$ c. g. s. liegende Werte. — Hecker und Schweydar fanden nach anderen Methoden die Riegheit der Erde etwa gleich der des Stahles ($8 \cdot 10^{11}$ c. g. s.).

Jeans bestimmte die Elastizitätskonstante λ im Mittel zu

$$4 \cdot 10^{11} \leqq \lambda \leqq 8 \cdot 10^{11} \text{ c. g. s.}$$

Alle erwähnten Methoden führen zu unter sich gut übereinstimmenden Werten für die elastischen Konstanten und sie konkor-

dieren der Grössenordnung nach recht wohl mit den aus seismischen Beobachtungen gefolgerten Elastizitätskonstanten.

Bei jedem Beben treten in der Vorphase drei verschiedene Wellenarten auf: Dilatationswellen (I. Vorläufer), Schiebungswellen (II Vorläufer) und endlich Wellen mit exponentiell variierender Intensität, die längs der Oberfläche sich ausbreiten, die sogenannten Rayleigh-Wellen. Mit Hilfe der Theorie der Refraktion lässt sich für die ersten und zweiten Vorläufer die Bahn der Bebenstrahlen im Erdinnern nach einem von Wiechert angegebenen konstruktiven und rechnerischen Verfahren ausfindig machen. Aus den Daten des Strahlenwegs und aus dem aus der „Laufzeitkurve" ablesbaren Austrittswinkel $\bar{i}$ der Strahlen an der Erdoberfläche wird die Wellengeschwindigkeit in allen Tiefen gefunden. — Die Geschwindigkeit der Dilatationswellen drückt sich durch $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, die der Schiebungswellen durch $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ aus. Bestimmt man also irgendwie die Wellengeschwindigkeiten, so sind auch die elastischen Eigenschaften der Erde (λ und μ) angebbar, wenn noch die Dichteverteilung (ρ) im Erdinnern bekannt ist. —

Wiechert, Zoeppritz und Geiger fanden für die Poissonsche Konstante der Erde im Mittel den Wert 0,27, der dem aus dem Gesetz „ut tensio, sic vis" und gewissen Annahmen über molekulare Kräfte gefolgerten Betrag dieser Konstanten so nahe liegt, dass in erster Annäherung das Gesetz der Superposition als bestehend angenommen werden kann (vergl. auch Seite 22). Damit ist aber eine der Hauptbedingungen für die Anwendbarkeit der gewöhnlichen elastischen Gleichungen auf Erdprobleme erfüllt.

Die Geschwindigkeiten der Dilatations- und Schiebungswellen wachsen bis 1500 km Tiefe nahezu linear an, um dann plötzlich aber ohne Sprung konstant zu werden. Die plötzliche Aenderung des Charakters der Geschwindigkeitskurve ist wohl nur durch einen Wechsel des Aggregatzustandes oder durch eine Aenderung im Erdmaterial zu erklären. Die Konstanz der Geschwindigkeitswerte setzt nun bemerkenswerter Weise gerade an der Oberfläche des von Wiechert schon früher hypothetisch angenommenen Eisenkerns ein. Die Resultate der seismischen Beobachtungen scheinen also die Wiechertsche Massenverteilungshypothese, die einen von einem Ge-

steinsmantel von der Dichte 3,3 umschlossenen Eisenkern mit der Dichte 8,2 annimmt, sehr gut zu bestätigen. —

Wir nahmen an, dass die Dichteverschiedenheit im Erdinnern innerhalb der einzelnen Schalen gleichen Materials bezw. in der ganzen Erde allein in der Gravitation ihre Ursache habe. Wirkte also die Schwerkraft nicht, so wäre die Erde durchweg oder in konzentrischen Schichten von gleicher (konstanter) Dichte. Wir nannten diese Dichte „ursprüngliche" Dichte und bezeichneten sie mit ρ_0 (Seite 25). Durch Einsetzen der von Wiechert gefundenen Geschwindigkeit der Dilatationswelle in die elastische Grundgleichung fanden wir für den Erdkern mit dem Grenzradius $r_2 = 4870$ km bezw. für die einzelnen Schichten desselben ein „Dichtegesetz" von der Form

$$\rho = \rho_0 \cdot c_1 \frac{\sin(\sqrt{m} \cdot r)}{r} . —$$

Für den übrigen Teil der Erde ergab sich nach Einführung eines konstanten mittleren Schwerewertes zur Vereinfachung der Rechnung

$$\rho = -\frac{g}{\alpha} \rho_0 \lg k_1 (\alpha r + \beta)$$

als Dichtegesetz. —

Nehmen wir an, dass der genannte Kern und der Mantel jeweils aus einheitlichem Material sich aufbauen, so liefern die Dichtegesetze folgende Resultate:

Die absolute Dichteänderung im Mantel beträgt 15,6% der „ursprünglichen" Manteldichte.

Der Dichtezuwachs im Kern in Prozenten der Dichte der Oberflächenschichten des Kerns bewegt sich zwischen 0 und 18¼, wenn die „ursprüngliche" Dichte zwischen 0 und 8 liegt; im besondern beträgt für $\rho_0 = 3$, $\rho_0 = 7$ und $\rho_0 = 8$ die Dichteänderung im Kern 6,3 %, bezw. 15,7 % und 18¼ % der Dichte an der Kernoberfläche.

Nimmt man die ursprüngliche Manteldichte zu 2,7 an und setzt weiterhin die Differenz zwischen Oberflächendichte und „ursprünglicher" Dichte der Dichteänderung im Mantel gleich, so erhält man als Oberflächendichte etwa 3,1 und an der inneren Grenzfläche des Mantels die Dichte 3,5. Bestände nun der Kern aus demselben Material wie der Mantel, so schlössen sich die Dichtewerte des Kerns unmittelbar an die im Mantel an. Bei der gewählten ursprünglichen Dichte beträgt dann der Dichtezuwachs im Kern noch nicht 7 % von

3,5, also etwa 0,24, und man erhält eine etwas über 3,6 liegende mittlere Kerndichte. Mit der mittleren Manteldichte 3,3 und der angegebenen Dichte des Kerns ist aber die mittlere Dichte der Erde 5,53 bei weitem nicht erreicht. Also bleibt nichts anderes übrig, als Materialverschiedenheiten im Erdinnern anzunehmen. Betrachtet man Kern und Mantel als jeweils gleichartig im Material, so verlangt der an der Erdoberfläche beobachtete Schwerewert eine Kerndichte von etwas über 8. Aus dem bezüglich der Dichtezunahme im Kern erhaltenen Resultat folgt aber dann sofort, dass auch schon die Dichte der Oberflächenschichten des Kerns sehr nahe bei oder über 8 liegen muss.

Als wichtigste Resultate ergeben sich demnach folgende:

Die hohe mittlere Dichte der Erde ist nur dadurch zu erklären, dass man im Erdinnern Schichten annimmt, die auch im unkomprimierten Zustand aus erheblich schwererem Material bestehen als die an der Oberfläche liegenden Gesteine.

Innerhalb der einzelnen Schichten gleichen Materials variiert die Dichte nur wenig. —

Die mit der Kerndichte 8,2 und der Dichte 3,3 für den Mantel berechneten und auf Seite 34 zusammengestellten Werte der elastischen Konstanten sind aus den Geschwindigkeiten der Erdbebenwellen abgeleitet; sie charakterisieren demgemäss das elastische Verhalten des Erdmaterials gegenüber sehr raschen Schwingungen. Gegenüber den ausserordentlich langen Perioden geologischer Umgestaltungen wird sich aber die Erde elastisch ganz anders verhalten. —

Die Schweremessungen erfordern nun für den grössten Teil der Erde innerhalb einer ca. 120 km starken äusseren Schale hydrostatische Schichtung. Hydrostatische Druckverteilung ist aber wenigstens angenähert nur dann möglich, wenn die Riegheit (μ) gegen die Werte der Konstanten λ bezw. gegen den Kompressionsmodul, der für langperiodige Kräfte wahrscheinlich derselbe ist wie für rasche Schwingungen, vernachlässigt werden kann.

Im letzten Teil der vorliegenden Arbeit wurde das durch die gegenseitige Gravitation der Teile im Erdinnern verursachte Spannungssystem unter verschiedenen Annahmen über Massenverteilung und elastische Eigenschaften der Erde berechnet. — Am ehesten entspricht den tatsächlichen Verhältnissen der Fall III, 1:

Die Erde besteht aus einem kompressibeln (Kompressionsmodul nach Wiechert) hydrostatisch geschichteten Kern mit der Dichte 8,2 und dem Radius $r_2 = 4870$ km; nach aussen folgt eine Magmaschicht konstanter Dichte ($\rho_1 = 3{,}3$) mit dem äusseren Radius $r_1 = 6270$ km und den mit dem Radius variierenden Wiechertschen Kompressibilitäten und endlich eine feste kompressible Schale von derselben Dichte, dem Grenzradius $r_0 = 6370$ km, den aus den Wellengeschwindigkeiten bestimmten Konstanten λ und μ und mit konstanter Massenkraft. — Vereinfacht man die Annahmen für die Rechnung dadurch, dass man statt des variabeln Kompressionsmodul für den Mantel einen konstanten mittleren Kompressionsmodul einführt, so erhält man in der 100 km dicken äusseren Schale, die für die Gebirgsbildung wohl allein in Betracht kommt, eine von 0 bis 31500 Atm. mit der Tiefe ansteigende radiale Spannung. An der Erdoberfläche herrscht ein transversaler Druck im Betrag von 83800 Atmosphären; an der Grenzfläche Schale-Mantel ist die transversale Spannung theoretisch auf 108000 Atm. angewachsen. In Wirklichkeit muss aber die Spannung senkrecht zum Radius und damit auch die Spannungsdifferenz in der Schale stark abnehmen, weil an der Oberfläche des Mantels seiner hydrostatischen Schichtung wegen Gleichheit der radialen und transversalen Spannung eintritt. Die Unstetigkeit im Spannungsverlauf ist nur die Folge der Einführung einer tatsächlich nicht vorhandenen scharfen Grenze zwischen elastischer fester Schale und dem Mantel von verschwindender Riegheit. — Die Transversalspannung an der Oberfläche ist im berechneten Betrag natürlich nicht wirklich vorhanden — die Gleichungen besagen nur, dass dann, wenn die Oberfläche der Erde eine vollkommen „glattpolierte“ Kugelfläche darstellte und aus unnachgiebigem Material bestände, die erwähnte Spannung in der angegebenen Grösse auftreten müsste. —

Ein Vergleich der in § 6 durchgerechneten Fälle ergibt folgendes:

Die Spannungsdifferenz hat an der Erdoberfläche ihr Maximum und ist in den betrachteten Fällen stets von Null verschieden. Sie erreicht sehr beträchtliche Werte, wenn die Erde zum grössten Teil oder im ganzen nicht inkompressibel ist. — Die Spannungsdifferenz an der Erdoberfläche fällt umso grösser aus, je grösser die mittlere Kompressibilität der Erde ist. — Nimmt man einen inkompressibeln Kern an, so wächst die Spannungsdifferenz mit der Dicke der kompressibeln Schale. Desgleichen nimmt die transversale Spannung und damit die Spannungsdifferenz mit wachsendem Schwerewert und

wachsender Dichte zu. Die Radialspannung zeigt ein entgegengesetztes Verhalten; sie ist bei einer Erde von hohem Kompressionsmodul durchweg grösser als bei einer Erde von grösserer Kompressibilität. — Je grösser die Transversalspannung ist, desto kleiner fällt die Radialspannung im betreffenden Niveau aus. — Das Maximum der Verschiebung liegt nicht etwa an der Oberfläche, sondern in erheblicher Tiefe. Ausserhalb der Fläche grösster Verschiebung besteht die Verzerrung in Dehnung, innerhalb derselben in Kontraktion. —

Wir denken uns die Erde, einem sehr weit zurückliegenden Zustand entsprechend, als in den äusseren Partien glutflüssig. Hat sich nach einiger Zeit infolge der Abkühlung eine oberflächliche feste Kruste gebildet, so treten in ihr Spannungen senkrecht zum Radius auf. Mit zunehmender Dicke der Rinde wachsen Spannungen und Spannungsdifferenz. — Die neugebildete feste Schale ist nun jedenfalls nicht durchaus homogen; an gewissen Stellen werden Gebiete geringerer Bruchfestigkeit vorhanden sein. Erreicht die Spannungsdifferenz bezw. die transversale Spannung an der Oberfläche einen bestimmten kritischen Wert, so vermag das Erdmaterial an den erwähnten „schwächeren" Stellen dem Druck nicht mehr standzuhalten. Die betreffenden Teile der Rinde werden in Schollen zertrümmert und die einzelnen Stücke weichen der Spannung nachgebend seitwärts und nach oben aus und schieben sich übereinander — es tritt Gebirgsbildung ein, die noch durch Ergüsse aus dem gleichfalls unter beträchtlicher Spannungsdifferenz stehenden flüssigen Untergrund der Schale verstärkt wird. — Infolge der stets weiter schreitenden Abkühlung lagern sich der Innenfläche der festen Schale stets neue Schichten an; gleichzeitig zieht sich der Erdkörper zusammen, die Dichte und der Schwerewert an der Oberfläche werden grösser. Alle diese Faktoren bewirken aber ein Anwachsen der Spannungsdifferenz; sie erreicht schliesslich einen so grossen Wert, dass an den vorhin betrachteten Stellen die Gebirgsbildung von neuem einsetzt oder vielleicht auch in anderen „festeren" Gebieten ihren Anfang nimmt. — Allmählich wird die ganze Oberfläche zertrümmert und in gegeneinander relativ leicht bewegliche Stücke zerteilt: Die Spannungsdifferenz nimmt erheblich ab, und es bildet sich in den äusseren Erdschichten ein Zustand annähernd hydrostatischen Gleichgewichtes aus. — Die Aufteilung der Kruste entspricht einer Auflockerung des Erdmaterials. Bedenkt man zudem, dass das stetige Wachstum der Schale eine Dehnung der der Oberfläche benachbarten Volumenelemente in Richtung des Ra-

dius nach sich zieht, so ist offensichtlich, dass die Kontinente und Gebirge nicht ohne weiteres als Massenanhäufungen angesehen werden, dass vielmehr in den meisten Fällen eine Kompensation durch verminderte Dichte der tiefer liegenden Schichten eingetreten sein wird.

Bei einer Erklärung der Gebirgsbildung darf der Aggregatzustand des Erdinnern jedenfalls nicht ganz unberücksichtigt bleiben. — Ueber die Konstitution der tieferen Erdschichten ist wenig sicheres bekannt. Wiechert nimmt an, dass der Erdkern aus festem Eisen bestehe. Anderen Tatsachen und Ueberlegungen entspricht wieder eher ein aus einem Gemisch stark komprimierter Gase sich konstituierendes Kernmaterial (vergl. Seite 25 und 32). —

Wie die Frage des Aggregatzustandes im Erdinnern werden auch andere geophysikalische Probleme erst dann sich lösen und vor allem die beobachteten Erscheinungen sich erklären lassen, wenn wir den Grundgedanken und die Methoden der Entwicklungstheorie, die auf dem Gebiet der beschreibenden Naturwissenschaften so ausserordentlich fruchtbar sich erwiesen haben, in die Physik der Himmelskörper übernehmen. — Die einzelnen Schichten verschiedenen chemischen und physikalischen Verhaltens im Erdkörper entsprechen in gewissem Sinn den Organen der belebten Organismen. Wie aber die Organe von Tier und Pflanze keineswegs zufällig und unvermittelt auftreten, wie sie in den entsprechenden Organen älterer Arten und in bestimmten Stufen der Embryonalentwicklung vorgebildet sind und durch sie erklärt werden, so findet auch die Konstitution der Himmelskörper und im besondern die der Erde in vorgängigen einfacheren Stadien ihre Begründung und letzte Deutung. —

Ist erst die Lehre von der Entwicklung der Himmelskörper genügend ausgebildet (vergl. d. astrophysikal. Arbeiten von Sir N. Lockyer!), so werden wir das Vorhandensein von Kern und Mantel mit bestimmten chemischen und physikalischen Eigenschaften in der Erde oder irgend eine andere Schichtung derselben ebensowohl voraussagen können, wie man aus dem Vorkommen bestimmter Organe bei niederen Arten deren Existenz bei höher entwickelten Formen erschloss und durch ad hoc ausgebildete Methoden verifizierte. —

Anhang.

Darwins Arbeit über die durch das Gewicht der Kontinente und der Gebirge im Erdinnern hervorgerufenen Spannungen.

Darwin hat die im Erdinnern durch das Gewicht der Gebirge und Kontinente bewirkten Spannungen zu berechnen versucht.[1]) Ich gebe im folgenden ganz kurz den Gang der Untersuchung und die Resultate, zu denen der Verfasser gelangte, wieder. — Zuvörderst sind einige unten vorkommende Ausdrücke zu erklären: Um jeden Punkt eines elastisch verzerrten Körpers lässt sich ein rechtwinkliges Parallelepiped abgrenzen, so dass nur Spannungen senkrecht zu seinen Ebenen wirken. Die drei so bestimmten Spannungen heissen Hauptspannungen, und ihre Richtungen Spannungs-Hauptachsen. — Die Differenz zwischen der grössten und der kleinsten Hauptspannung in einem Punkt heisst Spannungs-Differenz. Analog wird Verzerrungs-Differenz definiert. (Engl.: stress-difference und strain-difference).

Die „Spannungsdifferenz-Theorie" setzt die Spannungsdifferenz als Mass für die Tendenz eines festen Körpers zum Bruch; je grösser die Spannungsdifferenz, desto eher wird der Körper zertrümmert werden. — Die „Verzerrungsdifferenz-Theorie" benutzt die Verzerrungsdifferenz als dergleichen Mass. —

Darwin geht von einer von Sir William Thomson gegebenen Lösung des Gleichgewichtsproblems für die Kugel aus. Thomson findet die Verschiebung:[2])

$$(1) \qquad \alpha = \left(E_i a^2 - F_i r^2\right) \frac{dW_i}{dx} - G_i r^{2i+3} \frac{d}{dx}\left(W_i \cdot r^{-2i-1}\right)$$

und entsprechend β und γ für die anderen Axen.

E, F und G sind gewisse von den elastischen Konstanten und der Natur der Funktion W_i abhängige konstante Grössen. a bedeutet den Grenzradius der Kugel.

$$\omega - \frac{1}{3}\upsilon = (\lambda + 2\mu) - \frac{1}{3}\mu$$

[1]) Phil. Trans. of The Roy. Soc. vol. 173 (1882).

[2]) Thomson and Tait, Nat. Phil. § 834, 8 u. 9.

ist der Kompressionsmodul oder die „Inkompressibilität". Die Kugeloberfläche ist spannungsfrei; die Kugel frei von Gravitation, aber derart inneren Kräften unterworfen, dass die auf ein Volumenelement wirkende Kraft sich durch ein Schwerkraftspotential W_i als Kugelten Grades in x, y, z ausdrücken lässt.

(Vergl. übrigens zur Lösung und zum folgenden Darwins Berichtigung: „ . . . . Troughout the paper the normal stresses P, Q, R, require an additional term W_i. The only function of these stresses used for obtaining physical results is P − R, and it remains unchanged, when the correction is made . . . . Thomson's solution, when reduced to the form applicable to the incompressible solid, is the solution of the equations $-\frac{dp}{dx} + \upsilon \nabla^2 \alpha = \frac{dW}{dx}$ and two others. The solution required is that of $-\frac{dp}{dx} + \upsilon \nabla^2 \alpha = 0$ and two others. The W involved in my solution is not the potential of a true bodily force, but only an ‚effective potential' producing the same strains as those due to the weigh of the continents and mountains, but causing a different hydrostatic pressure . . . .")

Darwin betrachtet die Erde als inkompressibel und setzt demgemäss ω gegen υ als unendlich gross voraus. Für $\lim \omega = \infty$ wird die Verschiebung:

$$(2) \qquad \alpha = \frac{1}{2(i+1)^2+1} \cdot \frac{1}{\upsilon}\left[\left(\frac{i(i+2)}{2(i-1)}\alpha^2 - \frac{(i+1)(2i+3)}{2(2i+1)}r^2\right)\frac{dW_i}{dx} - \frac{i}{2i+1} r^{2i+3} \cdot \frac{d}{dx}\left(W_i\, r^{-2i-1}\right)\right]$$

$$\beta = ... ; \quad \gamma = ...$$

P, Q, R seien die Normal-, S, T, U die Tangential-Spannungen. Es ist

$$P = (\omega - \upsilon)\,\delta + 2\upsilon \frac{d\alpha}{dx}; \quad T = \upsilon\left(\frac{\delta\alpha}{\delta z} + \frac{\delta\gamma}{\delta x}\right) \text{ etc.}$$

worin

$$\delta = \frac{\delta\alpha}{\delta x} + \frac{\delta\beta}{\delta y} + \frac{\delta\gamma}{\delta z}$$

die Dilatation bedeutet. Die Spannung in einem Punkt ist $-1/3\,(P+Q+R)$. Die Spannungskomponenten lassen sich vermittels (2) durch W_i ausdrücken.

Beschränkt man sich in der Betrachtung auf die Aequatorialzone der Erde, so lässt sich das Potential der durch die Abweichung

von der Kugelgestalt hervorgerufenen Kräfte als Legendresche Funktion iter Ordnung (zonal harmonic) in der Form

$$(-1)^{\frac{1}{2}i}\frac{i!}{2^i\left[\frac{1}{2}i!\right]^2}\left[\sin^i\vartheta-\frac{i^2}{2!}\sin^{i-2}\vartheta\,.\cos^2\vartheta+\frac{i^2(i-2)^2}{4!}\sin^{i-4}\vartheta\,.\cos^4\vartheta-.+\ldots\right]$$

(i gerade) ausdrücken. Dieser Wert für W_i wird in die Formeln für P, Q, R, . . . eingesetzt und die auftretenden Konstanten werden für $i = 2$ bis $i = 12$ einschliesslich berechnet. — Thomson's Lösung lässt sich auch einem Sphäroid angleichen[1]) — die Gleichung des Sphäroids iter Ordnung, das gewisse „Unebenheiten" auf der Kugel mit dem Radius a bildet, sei $r = a + \delta_i$. Das Potential der von den Oberflächenabweichungen herrührenden gesamten Kraft berechnet sich zu $-2(i-1)\,g\,.\,w\,(r/a)^i\,.\,\delta_i\,/\,2i+1$. Dieser Ausdruck ist eine harmonische Funktion iten Grades und deshalb lassen sich die früheren analytischen Resultate direkt auf das Sphäroid übertragen. Die für die Kugel berechnete Funktion W_i, die Spannungen und Spannungsdifferenzen sind beim Uebergang zum Sphäroid lediglich mit einem Faktor

$$\frac{2(i-1)}{2i+1}\cdot\frac{g\,.\,w\,.\,h}{a^i}$$

zu multiplizieren. (h bedeutet die Höhe über der mittleren Kugel am Aequator; w ist die Dichte der Oberflächenabweichungen; $g = 981$ c. g. s.). — Die für W_i gewählte Funktion stellt eine Reihe von Wellen dar, die parallel dem Aequator über die Kugel laufen. Die Zahl der Wellenberge oder der Talsenken ist durch die Ordnungszahl i der harmonischen Funktion gegeben.

Die durch die harmonische Funktion 2ter Ordnung ($i = 2$) dargestellte Oberflächenabweichung besteht aus einer einzigen Welle, die eine Erhebung rund um den Aequator und an den Polen Depressionen bildet (ellipt. Rotationssphäroid).

Für hohe Ordnungszahlen i haben wir regelmässige Bergketten und Talzüge, die in Parallelkreisen die mittlere Kugel umwinden (für $i = \infty$ ist die Gleichung der Oberfläche: $\xi = -h\,.\cos\frac{z}{b}$).

Die zonale Kugelfunktion 4ter Ordnung bildet einen Aequatorial-Kontinent und zwei kreisrunde polare Kontinente; zwischen Polar- und Aequator-Kontinent liegt jeweils eine Einsenkung.

---

[1]) G. H. Darwin, Phil. Trans. 1899, Part. I, pg. 1.

$i = 6$ liefert einen äquatorialen Kontinent und je eine ringförmige Erhebung in den Breiten $+60^0$ bezw. -60^0.

Die Funktion 8ter Ordnung endlich rückt diese Ringwulste in die Breiten $+45^0$ bezw. -45^0 herunter und fügt ein Paar polarer Erhebungen hinzu u. s. w. —

Darwin berechnet nun für $i = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ und $i = \infty$ die Spannungsdifferenzen und zieht aus den erhaltenen Zahlenwerten für diese Differenz, die ihm als Mass für die Tendenz des Materials zum Zerbrechen dient, Schlüsse über die Eigenschaften der in der Tiefe der Erde lagernden Gesteine. — Er kommt zu folgenden Resultaten:

$i = 2$ (abgeplatt. Rotationssphäroid; Einfluss gezeitenbildender Kräfte):

Die Spannungsdifferenz D im äquatorialen Radius beträgt $8a^2 - 7r^2$, in einem Punkt des polaren Radius $8a^2 - 9r^2$. Die Spannungsdifferenz ist Null für den Punkt des Polarradius:

$r = 2/3 \cdot a \cdot \sqrt{2} = 0{,}9425 \cdot a$, wo a der Radius der mittleren Kugel ist. An der Oberfläche der mittl. Kugel ($r = a$) ist $D = a^2 =$ konst. Für $r = 0$ (im Erdmittelpunkt) wird $D = 8a^2$ gleich dem achtfachen Oberflächenwert. — Bei einer Elliptizität des Sphäroids von 1/1000 verursacht der gezeitenwirksame Einfluss des Mondes an der Oberfläche bezw. im Mittelpunkt die Spannungsdifferenz $D = 16$ gr/cm^2 bezw. $D = 8 \cdot 16$ gr/cm^2 $= 128$ gr/cm^2. Die letzteren Spannungen erscheinen unbedeutend gegenüber dem von den Gebirgen und Kontinenten erzeugten Spannungssystem; sie sind aber immerhin so gross, dass die Erde gegen die gezeitenbildenden Kräfte sehr „steif“ (μ gross) sein muss.

$i = \infty$; der Kugelradius wird unendlich gross angenommen: Die Ungleichheiten der Oberfläche bestehen aus einer Reihe paralleler einfach harmonischer Bergketten und Täler. Die Gleichung der Oberfläche berechnet sich aus W_i für $i = \infty$ und $a = \infty$

zu

$$\xi = -h \cdot \cos \frac{z}{b};$$

ξ bezeichnet (nach unten gemessen) die Abweichung des Punktes (x, y, z) von der mittleren Oberfläche. h ist die Höhe der Berge bezw. die Tiefe der Täler; b wird definiert als $\lim_{a=\infty, i=\infty} \frac{a}{i}$

$2\pi b$ ist die Wellenlänge, d. h. der Abstand der Kämme zweier Bergketten oder aufeinanderfolgender Talsohlen.

Es zeigt sich, dass die Spannungsdifferenz von dem Abstand der Bergzüge nicht abhängt; dagegen ist die Tiefe, in der das Maximum der Spannungsdifferenz erreicht wird, durch die Wellenlänge mitbestimmt. —

Die Spannungsdifferenz hat ihren grössten Wert für

$$\xi = b = \frac{\text{Wellenlg.}}{2\,\pi};$$

sie ist im Maximum 0,736 . w . h, wenn w die Dichte der Oberflächenschichten ist. Für $w = 2{,}8$; $h = 2 \cdot 10^5$ cm (siehe unten) wird $D_{max} = 0{,}736 \cdot 2{,}8 \cdot 2 \cdot 10^5$ gr/cm^2 $= 0{,}412 \cdot 10^6$ gr/cm^2; für eine Wellenlänge von 314 Meilen (engl.) erreicht D sein Maximum in 50 Meilen Tiefe. — Hätten die Gesteine in dieser Tiefe etwa nicht mehr Bruchfestigkeit als gewalztes Blei, so müssten die Gebirge untersinken, während Massen von der Bruchfestigkeit gegossenen Zinns den Druck aushalten könnten. —

Darwin nimmt an, dass die mittleren Abweichungen der Erdoberfläche von einer gewissen Niveaufläche (bis zu der etwa im Meere mit Gestein gleicher Masse angefüllt sein müssten) ungefähr 3000 Meter betragen. Er trägt jedoch, um die nach aussen stark abnehmende Dichte des Erdkörpers in Rechnung zu stellen, nur die Hälfte dieses Wertes, d. i. 1500 Meter als mittlere Höhe der Berge und als Tiefe der Senken in die Formeln ein. — Für die mittleren i ergibt sich mit $w = 5{,}66$; $h = 1500 \cdot 10^2$ cm folgende Tabelle:

Ordng. d. harm. Funkt.	2	4	6	8	10	12
D_{max} in Tonnen/cm^2	0,858	0,633	0,626	0,625	0,625	0,625
Tiefe in engl. Meilen, in der die maximale Sp.-Diff. erreicht ist	Mittelp.	1146	725	532	420	347

Im vorstehenden wurden immer nur die Spannungsdifferenzen am Aequator unmittelbar unter den Zentren der Kontinente bestimmt. Es zeigt sich aber, dass die Aenderungen mit zunehmender Breite irrelevant sind. Die Kurven gleicher Spannung verlaufen mit grosser Annäherung parallel der Oberfläche; für alle praktischen Zwecke genügt es, die Spannungen unter den Zentren der Kontinente zu kennen. —

Schliesslich bildet der Verfasser aus den 6 „harmonics“ ($i = 2$, $i = 4$, ... , $i = 12$) ein äquatoriales Festland. Dasselbe stellt sich dar als eine äquatoriale bis zu etwa 15° Breite beider-

seits reichende Erhebung. Der übrige Teil des Sphäroids ist nahezu kugelförmig. Die Spannungsdifferenz erreicht hier ihr Maximum 0,66 Tonnen/cm^2 in ca. 600 Meilen Tiefe. Benützt man die harmonische Funktion zweiter Ordnung nicht zur Darstellung des Kontinents, so erhält man eine ähnliche äquatoriale Erhebung, der ein Paar Polar-Länder gegenübersteht. D_{max} ist in diesem Fall 0,6 Tonnen/cm^2 in rund 700 Meilen Tiefe. — Amerika und Afrika mit Europa liessen sich in erster Annäherung durch eine harmonische Funktion 4ter Ordnung der Sektorklasse ($\sin^4 \vartheta \,.\, \cos^4 \vartheta$) darstellen.[1]) Begnügt man sich mit einer Legendreschen Funktion 4ter Ordnung als entsprechender Darstellung, so erhält man für die Spannungsdifferenz im Maximum etwa 0,65 Tonnen/cm^2; das Maximum liegt 1100 Meilen unter der Erdoberfläche, — Marmor hielte dieser Spannungsdifferenz nicht mehr stand, wohl aber noch Granit. —

Darwin hat auch noch den Fall der merklich kompressibeln Erde untersucht. Die in § 10 seiner Arbeit gegebenen hierauf bezüglichen Resultate sind nicht richtig. Einmal sind die Ausdrücke für die Spannungsdifferenz unvollständig; ferner wird angenommen, der Kompressionsmodul sei sehr klein verglichen mit der Steifigkeit υ Aus den Gleichungen

$$\mu = \frac{E}{2\,(1+\sigma)}, \quad k = \frac{E}{3\,(1-2\,\sigma)}$$

folgt nun aber, dass der Kompressionsmodul nur dann klein und μ gleichzeitig sehr gross sein kann, wenn σ nahe gleich — 1 wird. Ein solcher Wert der Poissonschen Konstanten erweist sich aber für einen isotropen Körper als ganz unmöglich. Darwin hat also hier die für isotrope Körper geltenden Gleichungen auf ganz sicher nicht isotropes Material angewandt. —

Der Einwurf, den Chree gegen die Abhandlnng erhebt[2]), dass nämlich nirgends die Anfangsspannung der durch die gegenseitige Gravitation ihrer Teile verzerrten Erde berücksichtigt sei, scheint nicht mehr so schwerwiegend, nachdem an Hand der Werte für σ im Erdinnern und aus andern Tatsachen sich zeigen lässt, dass trotz der hohen Anfangsspannung das Gesetz der Superposition in erster Annäherung im ganzen Innern der Erde gewahrt bleibt. (Vergl. S. 23).

[1]) Die Verteilung von Land und Wasser kann annähernd durch Kugelfunktionen bis zum 3. Rang inkl. dargestellt werden; Love, Lond. Phil. Trans. 207 (1907) pg. 237 u. Proceedings 80 (1908) pg. 553—556.

[2]) C. Chree, Phil. Magaz. (5. Ser.) vol. 32 (1891).

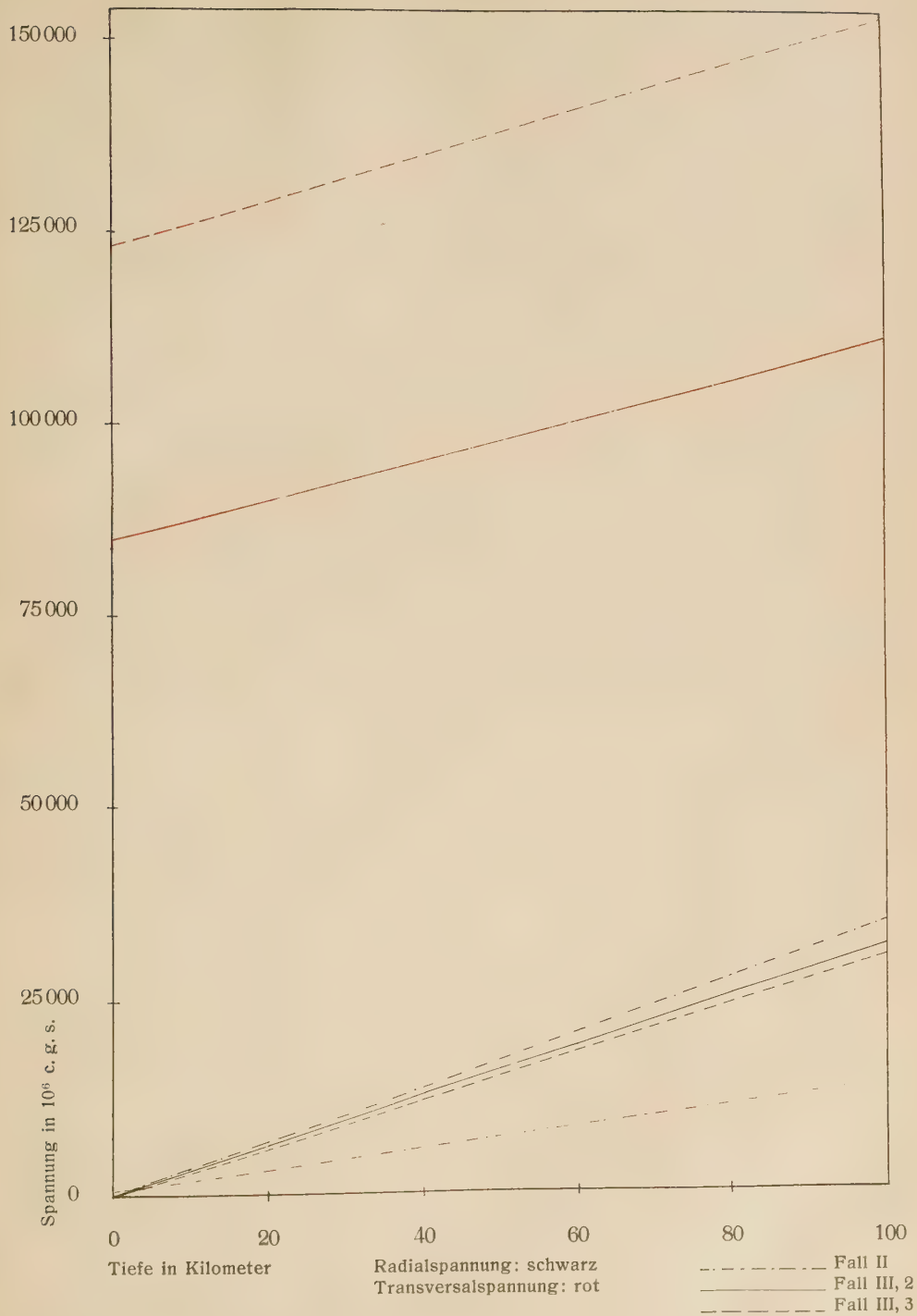
Im übrigen ist es nicht ohne weiteres erlaubt, die Kontinente, wie Darwin es getan hat, als Massenanhäufungen zu betrachten (vergl. S. 62). Aus den neueren Bestimmungen der Schwere auf den grossen Meeren, namentlich aus den Beobachtungen von O. Hecker[1]) ergibt sich, dass — von der Höhenstörung abgesehen — ein merklicher Unterschied zwischen den auf den Kontinenten und den Ozeanen gemessenen Werten von g nicht vorhanden ist. Es folgt daraus, dass die Festländer geringere Dichte haben als die unter dem Meeresboden liegenden Schichten, oder, dass sie durch tiefer liegende Massendefekte kompensiert sind.[2])

[1]) O. Hecker, Best. d. Schwerkraft auf d. Atlant. Ozean usw.
„ „ „ „ „ d. Ind. u. Gross. Ozean,
beide Berlin, 1908.

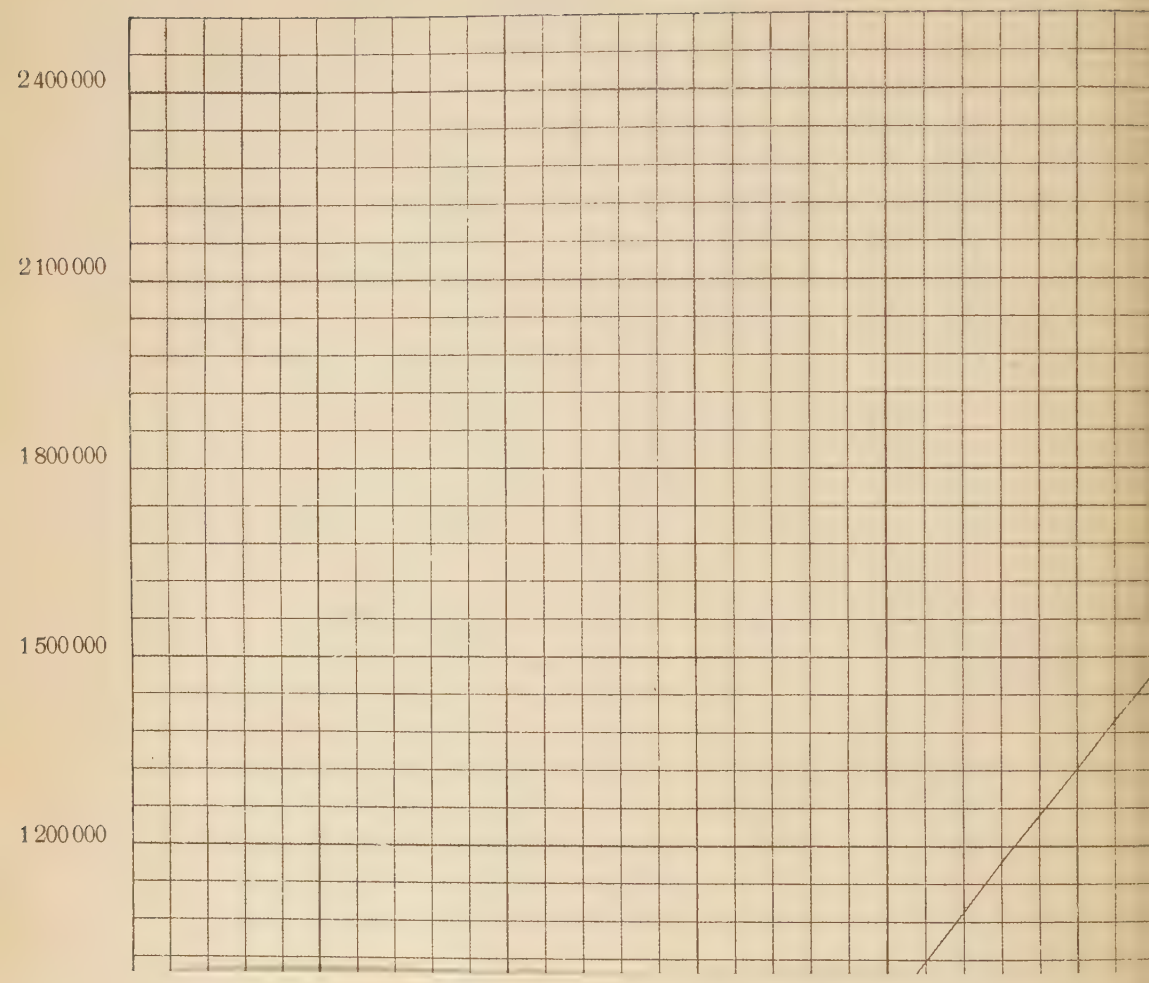
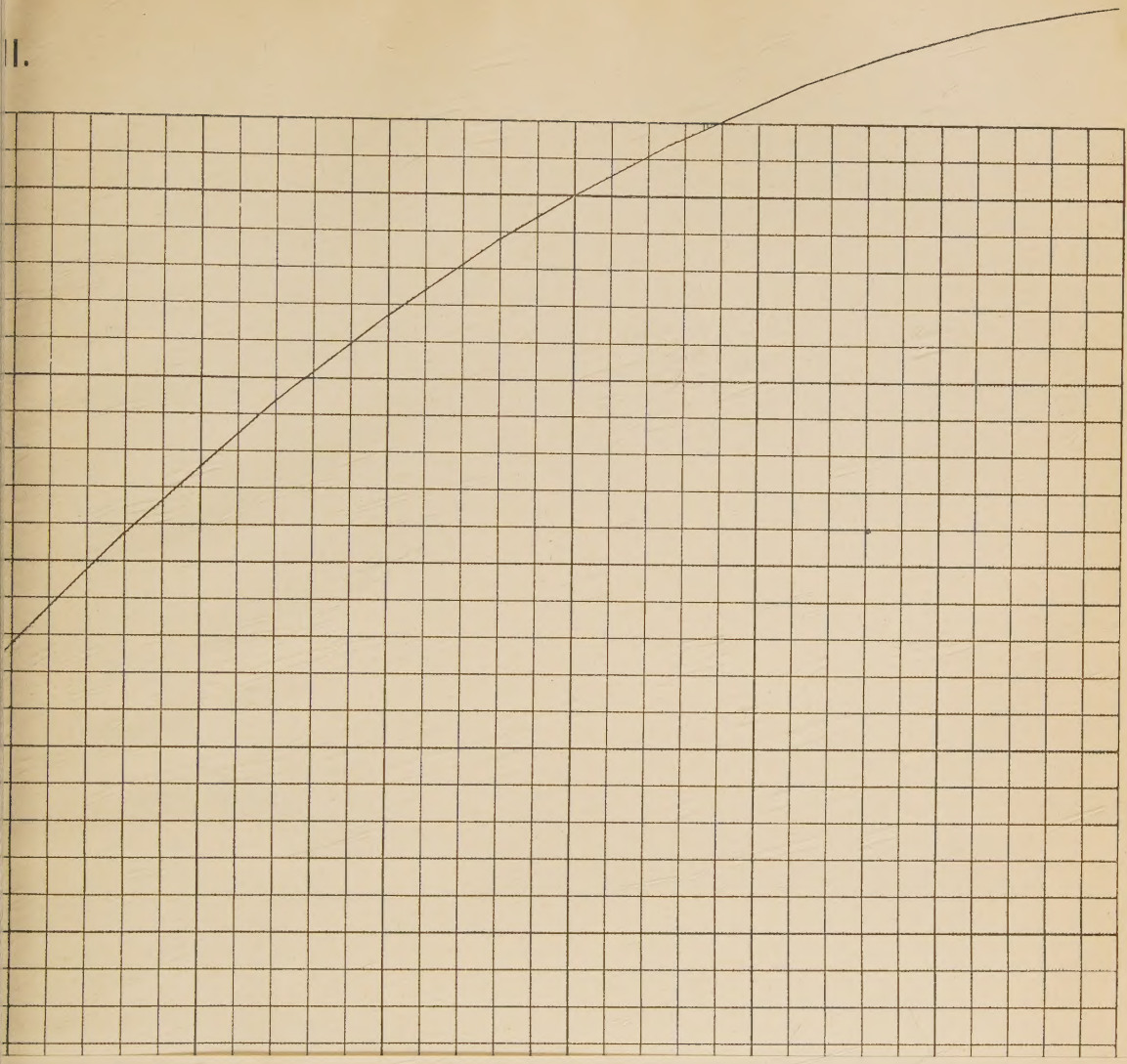
[2]) Ency. der Math. Wiss., Bd. VI, 1,B Heft 2, No. 13

Herrn Prof. Dr. J. Koenigsberger bin ich für die Anregung zu vorliegender Dissertation und vielfachen Rat während der Ausarbeitung derselben zu grossem Dank verpflichtet.

Tafel I.


150000
125000
100000
75000
50000
25000
0
Spannung in 10^6 c. g. s.
0
20
40
60
80
100
Tiefe in Kilometer
Radialspannung: schwarz
Transversalspannung: rot
Fall II
Fall III, 2
Fall III, 3

T



II.